EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN

J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

MET MEDEWERKING VAN

Dr. H. J. E. BETH
DEVENTER

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS
OISTERWIJK

Dr. G. C. GERRITS
AMSTERDAM

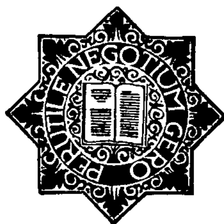
Dr. B. P. HAALMEIJER
AMSTERDAM

Dr. D. J. E. SCHREK
UTRECHT

Dr. P. DE VAERE
BRUSSEL

Dr. D. P. A. VERRIJP
ARNHEM

6e JAARGANG 1930, Nr. 3



P. NOORDHOFF — GRONINGEN

Prijs per Jg. van 18 vel f 6.—. Voor inteekenaars op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde en Christiaan Huygens f 5.—.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken, verschijnt in zes tweemaandelijksche afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang *f* 6.—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (*f* 6.—) of op „Christiaan Huygens" (*f* 10.—) zijn ingeteekend, betalen *f* 5.—.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans-van-Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Het honorarium voor geplaatste artikelen bedraagt *f* 20.— per vel.

De prijs per 25 overdrukken of gedeelten van 25 overdrukken bedraagt *f* 3,50 per vel druks *in het vel gedrukt*. Gedeelten van een vel worden als een geheel vel berekend. Worden de overdrukken buiten het vel verlangd, dan wordt voor het afzonderlijk drukken bovendien *f* 6.— per vel druks in rekening gebracht.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

ERRATA.

Bij het afdrukken van de vorige afl. zijn op pag. 53, noot [1]) laatste woord 2de regel v. o., eenige letters uitgevallen.

Men leze daar: πασῶν

☞ De redactie heeft het genoegen in deze aflevering het portret te geven van Prof. H. J. VAN VEEN; zij hoopt de portretten van al onze hoogleeraren den inteekenaars achtereenvolgens te kunnen aanbieden.

het „Leerboek over den bol en den cylinder” en over den „Cirkelmeting” van Archimedes, en over de „Kegelsneden” van Apollonius van Perga.

Voor de natuurkunde en de natuurlijke historie treedt de „Geschiedkundige Bibliotheek” van Diodorus [1]) van Sicilië meer op den voorgrond. Hij was een Grieksch geschiedschrijver, geboren te Agyrium, tijdgenoot van Cesar en Augustus en bezocht verschillende landen van Europa en Azië om allerlei inlichtingen in te winnen over wetenschappen, aardrijkskunde, geschiedenis enz. Die zoo verkregen gegevens gaven hem de middelen om na dertig jaar arbeid zijn „Geschiedkundige Bibliotheek” op te bouwen. Van de 40 boeken zijn er slechts 15 bewaard gebleven.

Het „Leerboek der Architectuur” [2]) (10 boeken in een deel) van Marcus Vitruvius, ingenieur in de dienst van Cesar, verschaft ons belangrijke gegevens over de mechanika en de werktuigen.

De Grieksche wiskundige van Alexandrië, Pappus, [3]) die in de

---

octo et Sereni Antisensis de sectione Cylindri et Coni libri duo. Oxoniae, in-fol.; 1710; en in de eerste Grieksch-Latijnsche uitgaven van de werken van Archimedes door Thomas Gehauff (Venatorius), te Bazel in 1544: „Archimedes opera, quae quidem extant omnia, nunc primum et graece et latine in lucem edita; adjecta sunt Entocii Ascalonitae in eosdem Archimedos libros commentaria, item graece et latine, nunquem antea excusa”.

[1]) Sept Livres (liv. XI—XVII, commençant au voyage de Xerxes et finissant à la mort d'Alexandrie) des histoires de Diodore Sicilien neuvellement traduyts de grec en Franceys par Jacques Amyot. Paris, Michel de Vascosan, 1554 in fol. Ferd. Hoefer: „Bibliothèque historique de Diodore de Sicile” (eerste uitgave 1846; tweede uitgave 1865 (Parijs). 4 vol. in 12).

[2]) E. Cardien en A. Coussin: „Les dix livres d'Architecture de Vitruve avec les notes de Perrault”. Paris, Morel, 1850, 2 vol. in-4°.

[3]) De „Collectio Mathematica” werd niet overgezet in een levende taal.

„Pappi Alexandrini Mathematicas Collectiones, a Fed. Commandino Urbinate in latinum conversae et commentariis illustratae.” Pisauri, 1588, in 4°. Manolesius bezorgde te Bologne, in 1660, een nieuwe uitgave.

„Pappi Alexandrini collectionis quae supersunt edidit, latina interpretatione et commentariis instruscit Fred. Hultsch”. Berolini, 1875—1878, 3 vol., in-8. (De beste uitgave).

„Die Sammlung des Pappus von Alexandrien. Buch 7 und 8. Griechisch und Deutsch herausgegeben von C. J. Gerhardt.” Halle, 1871.

„Sur la date de Pappus d'Alexandrie” par M. l'Abbé Rome, in Annales de la Société Scientifique de Bruxelles; Serie A, 2de fascicule, 1927; pp. 46—48. Zie ook: „Mémoires Scientifiques de P. Tannery”, II.

tweede helft der vierde eeuw na Chr. leefde, schreef een werk dat in de geschiedenis der wetenschappen geboekt staat onder den titel: „Collectio Mathematica", bestaande uit acht boeken. Het eerste boek is verloren gegaan; van het 2de is een fragment bewaard; de andere zijn bewaard gebleven en behandelen hoofdzakelijk de zuivere meetkunde (in boek 3 het Delische werkstuk); in boek 6 wordt de sterrenkunde en in boek 8 de mechanika behandeld.

De „Collectio Mathematica" is geen leerboek en de besproken kwesties zijn er niet behoorlijk gerangschikt.

Het overgroote aantal stellingen, werkstukken en hulpstellingen, dat we er in aantreffen, geven gewichtige aanduidingen over de voornaamste geschriften en onderzoekingen van bijna al de wiskundigen der Alexandrijnsche school.

Opgemerkt zij, dat een klaar inzicht in de „Collectio Mathematica" haast onmogelijk blijkt, wanneer men zich niet al te best thuis gevoelt in de Helleensche wiskunde, want de stellingen schijnen er niet het minste onderlinge verband te hebben. Het zevende boek is het belangrijkste, omdat er de meetkundige analyse der ouden in besproken wordt.

E. De Hairs.

DIE BEDEUTUNG DER MATHEMATIK FÜR DIE WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTEN UND DEN WIRTSCHAFTSWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHT,

Abdruck eines Referats, erstattet dem Internationalen Kongres für das Kaufmännische Bildungswesen (Amsterdam, 2—5 September 1929). Mit einer Ergänzung.

Die Wirtschaft beruht auf der Zahl und dem Mass. Diese sind zwar nicht ihre einzigen Träger, aber jedenfalls sehr wesentliche, und daher muss der wirtschaftende Mensch die Kunst verstehen, mit Zahlen und Massen zu arbeiten. Aus den Bedürfnissen der Praxis des ursprünglich gewiss sehr primitiven Geschäftsverkehrs heraus hat sich diese Kunst enwickelt. Aegyptische Urkunden aus dem Jahre 2000 v. Chr. (1) zeigen uns, wie man damals gewisse Bruchaufgaben zu lösen verstand nach einer Methode, die viel später von italienischen Kaufleuten benutzt als sogenannte „welsche Praktik" nach Deutschland gekommen ist (2). Aber bei dem Volk, dessen geistige Schöpfungen und dessen Kultur auf unsere neuzeitliche Kultur einen überaus beherrschenden Einfluss ausgeübt haben — ich meine die Griechen — lassen die überkommenen Schriften, die sich mit der Wissenschaft von Zahl und Mass beschäftigen, zum überwiegenden Teil ein bewusstes Fernhalten jeglicher Anwendung im praktischen Leben erkennen. So hat z.B. Euklid, dessen Elemente bis in die neueste Zeit hinein den mathematischen Unterricht beherrscht haben und in England auch heute noch dem Unterricht oft zugrunde gelegt werden (3), keine einzige durchgeführte numerische Flächenberechnung. So erklärt es sich wohl auch, dass man bei vielen Vertretern des Wirtschaftslebens und der Wirtschaftswissenschaft das kaufmännische Rechnen gar nicht als ein Gebiet angewandter Mathematik ansieht, sondern

vielmehr zwischen Rechnen und Mathematik einen scharfen Gegensatz feststellen will. Es waren zwar tüchtige Mathematiker wie Leonardo von Pisa (1228) und Lucca Paccioli (1494), die durch ihre Schriften für die kaufmännische Arithmetik bahnbrechend geworden sind; aber später haben sich und namentlich im 19. Jahrhundert die Mathematiker unter dem Einfluss des Neuhumanismus um diese Gebiete der Anwendung gar nicht mehr gekümmert (4), und so hat sich vielfach für die kaufmännische Arithmetik eine Sprech- und Denkweise gebildet, die die Vorteile des neuzeitlichen mathematischen Denkens nicht ausnutzt; auch in neueren Rechenbüchern wird als Ballast aus alter Zeit noch so manches an besonderen Gebieten mitgeschleppt, was alles auf dem gleichen einfachen mathematischen Gedanken beruht; ähnlich wie z.B. Rechenbücher früherer Jahrhunderte als besondere Rechnungsart das Verdoppeln lehren.

In unserer Zeit, in der soviel vom Taylorisieren die Rede ist, muss man auch im Unterricht beachten, dass durch die systematische neuzeitliche Sprache der Mathematik gewisse immer wiederkehrende Prozesse von grosser praktischer Bedeutung taylorisiert sind. Es ist eine Zeit- und Kraftvergeudung, wenn z.B. einfache Teilungs-oder -Mischungsaufgaben, deren stets wiederkehrender Grundgedanke sich in mathematischer Sprache durch eine Gleichung ausdrücken lässt, schwerfällig und unter Vermeidung mathematischer Symbole behandelt werden. Die verschiedenen Arten des Diskontierens mit ihren höchst unpraktischen Bezeichnungen auf, vom, im Hundert werden bei der Uebertragung in die mathematische Sprache in ihrem Grundprinzip sofort verständlich: Die Bank ersetzt das theoretisch richtige Diskontieren, das eine Division erfordert, durch eine bequemere annähernde Substraktion, d.h. es wird die Annäherungsformel benutzt

$$\frac{1}{1+x} \sim 1 - x. \quad (\sim \text{ ungefähr gleich}).$$

Diese Annäherungsformel gilt natürlich nur, wenn x eine kleine Zahl ist. Das Beispiel dürfte für die verschiedenen Klassenstufen ganz besonders geeignet sein. Auf der unteren Stufe wird man die Brauchbarkeit der Annäherungsformel an vielen praktischen Beispielen erproben lassen, später wird man, wenn die Schüler mathematisch weitergekommen sind, zeigen, wie die Praxis vielfach unbewusst die Anfangsglieder einer Entwicklung nach einer

geometrischen Reihe benutzt. Wer das erfasst hat, wird die Sinnlosigkeit der vielen Erörterungen früherer Zeiten über die richtige Art zu diskontieren, sofort einsehen. Das Verständnis wird aber auch wesentlich gefördert, wenn man an dieser Stelle das doch immer wichtiger werdende neuzeitliche Hilfsmittel der graphischen Darstellung benutzt. Es ist wirklich nicht nötig, dass man hierzu erst einen grossen Apparat in Bewegung setzt, um sich ein anschauliches Bild von der wichtigen Annäherungsformel zu machen. Jede der beide Seiten dieser Annäherungsgleichung stellt man in demselben Netz graphisch dar und erhält dann folgendes Bild, das sofort zeigt, wie diese Annäherungsformel nur für kleine Werte von $x = \frac{pn}{100}$ d.h. hier praktisch gesprochen, für kleine Zeiten brauchbar ist.

Die Diskontierungsformeln

$$K = K_n\left[1 - \frac{pn}{100}\right] \text{ Gerade Linie}$$

$$K = \frac{K_n}{1 + \frac{pn}{100}} \text{ Hyperbel}$$

$$K_n = 100;\ p = 10\,\%.$$

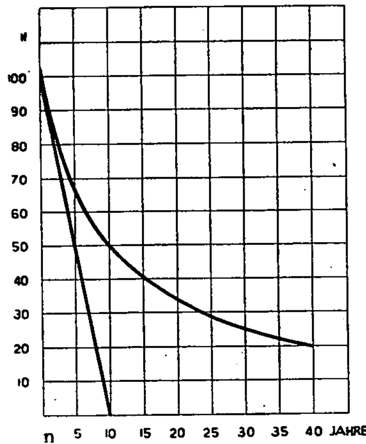


Fig. 1.

Für grosse Werte weicht die gerade Linie, die die Annäherung darstellt, ganz erheblich von der theoretisch richtigen Hyperbel ab. Man braucht hierzu gar keine Eigenschaften der Hyperbel zu kennen. Das Wort erscheint nur als der Name für das geometrische Bild der theoretisch richtigen Diskontierung. Es ist auch noch

nicht einmal nötig, dass der Schüler den Namen hört, aber der Lehrer des kaufmännischen Rechnens sollte wenigstens so viel mathematische Bildung haben, um das zu wissen. Ein ähnliches lehrreiches Beispiel liefert die Beziehung zwischen dem Zinsdivisor D und dem Prozentsatz p (5) und der Zahl T der für das Jahr gerechneten Tage (in Deutschland T = 360). Diese Beziehung D = T : p liefert in graphischer Darstellung bei einem rechtwinkligen Achsenkreuz für D und p ebenfalls eine Hyperbel. Bei einer einigermassen genauen Zeichnung kann man gut zu irgendeinem Zinsfuss den zugehörigen Divisor ablesen. Benutzt man logarithmisch eingeteiltes Papier, so erhält man einfacher eine gerade Linie hat. Eine wirklich brauchbare Zeichnung die eine Tabelle ersetzen soll, erfordert natürlich, meist recht einfache, mathematische Ueberlegungen. Es gibt aber Beispiele, die zeigen, wie durch eine nicht genügend überlegte Massstabänderung innerhalb der Zeichnung ein ganz falsches Bild der betreffenden wirtschaftlichen Vorgänge entsteht. So wurde z.B. im Jahre 1922 von einem deutschen Reichtstagsabgeordneten folgendes Diagramm veröffentlicht, das eine an sich richtige Tatsache deutlich machen sollte: die verheerende Wirkung der Ermordung Rathenaus auf die deutsche Währung:

Ein Zwanzig Markstück galt in Papiermark:

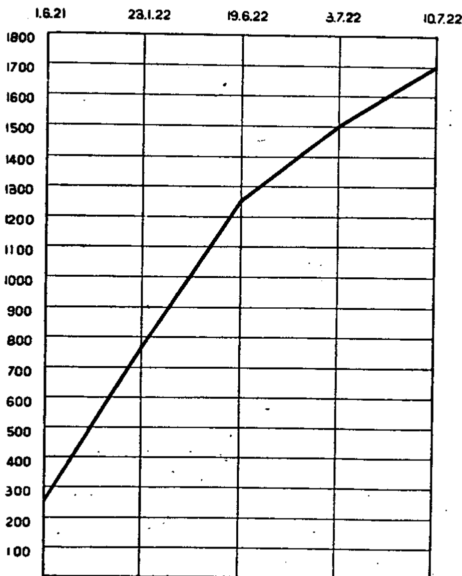


Fig. 2. Falsche Darstellung.

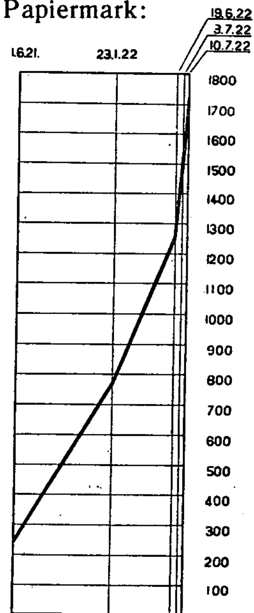


Fig. 3. Richtige Darstellung.

Auf der horizontalen Achse dieser Figur, die die Kalendertage angibt, ist der Massstab viermal geändert, und so zeigt das grundfalsche Bild gerade das Gegenteil von dem, was der Verfasser erläutern will: die sprunghafte Verschlechterung der Währung unmittelbar nach der Ermordung am 24. Juni 1922. Nach der falschen Zeichnung (Figur 2) sieht es so aus, als wenn der Papiermarkpreis für ein 20 Mark-Stück unmittelbar nach dem Unglückstage viel langsamer gestiegen sei als vorher. Die richtige Darstellung gibt Figur 3 (6).

Die in neuerer Zeit häufig veröffentlichen graphischen Darstellungen der Kursbewegungen erscheinen dem nathematisch Geschulten unpraktisch. Da es sich um Verhältniszahlen handelt, ist es viel anschaulicher, statt der absoluten Werte die Logarithmen der Kurse (7) oder logarithmisch eingeteiltes Papier zu benutzen, was auch für Arbitrageaufgaben sehr geeignet ist.

Aus der graphischen Darstellung heraus hat sich in neuerer Zeit zu immer grösserer Bedeutung eine Art geometrisches Rechnen entwickelt: die Nomographie, deren Grundgedanke durch folgendes einfaches Beispiel erläutert sei: Eine Produkttafel mit doppeltem Eingang liefert die Produkte $x . y = z$. Deutet man für ein gegebenes Produkt z die Faktoren x und y als rechtwinklige Koordinaten, so bestimmt jedes z eine Hyperbel. Ist nun ein für allemal für eine grössere Reihe von Werten von z ein System solcher Hyperbeln aufgezeichnet, so kann man aus der Zeichnung sofort Produkte ablesen oder umgekehrt den Quotienten, wenn das Produkt und ein Faktor gegeben ist. Das Wesentliche dieser Methode besteht darin, dass eine Beziehung zwischen mehr als zwei veränderlichen Grössen graphisch in der Ebene dargestellt wird und ein schnelles Ablesen des Resultates erlaubt. Derartige Nomogramme sind in der neueren Zeit auch für Sparkassen und Banken konstruiert worden. Ich nenne insbesondere die von Luckey, (8) Kraitchik (9) und Mounier (10) publizierten sehr praktischen Nomogramme.

Der jedem Ingenieur unentbehrliche logarithmische Rechenstab dringt nun langsam auch in das kaufmännische Rechnen ein und muss daher auch in den Handelsschulen zum Verständnis gebracht werden. Auch die vorteilhafte Ausnutzung der Rechenmachinen erfordert eine gewisse mathematische Schulung, wenn man sich nicht damit begnügen will, die Schüler rein mechanisch auf ein

Verfahren einzuüben. Das gleiche gilt von dem Gebrauch der verschiedenen Zahlentabellen, bei denen besonders auch das Berechnen der Zwischenwerte eine lehrreiche Aufgabe darstellt.

Der immer stärker werdende Gebrauch solcher rechnerischen Hilfsmittel bringt freilich die Gefahr mit sich, dass das Kopfrechnen, das Heimnischwerden im Zahlenbereich, verkümmert. Hier wird es Aufgabe des Unterrichtes sein, immer wieder zu zeigen, wie durch die Benutzung gewisser einfacher mathematischer Formeln das schnelle Kopfrechnen erleichtert wird. Es sei nur an die bekannte Formel $a^2 - b^2 = (a + b) (a - b)$ zur schnellen Ausrechnung von etwa $42 . 38$ erinnert; aber auch manche andere Zahlengesetze dienen zur Erleichterung numerischen Rechnens und führen den darin Geübten zu einem Individualisieren der Zahlen. In dieser Beziehung bietet der Nachlass eines so groszen Mathematikers wie Karl Friedrich Gauss, der viel und gern numerisch gerechnet hat, für den Unterricht sehr lehrreiche Fingerzeige (11). Auch aus den Veröffentlichungen mancher Rechenkünstler ist für den mathematisch Geschulten didaktisch viel zu lernen (12). Gewisse sollen die Schüler nicht zu Rechenkünstlern ausgebildet werden, aber was mathematische Ueberlegungen und Gesetze dem numerischen Rechnen nutzen, kann ein darin ausgebildeter Lehrer im Unterricht sehr anregend verwerten (13). Er sollte aber auch über die Psychologie dieser Dinge Bescheid wissen, damit er sich dessen bewusst bleibt, dass nicht alle Schüler die Zahlvorstellungen haben, die seinem eigenen psychologischen Typ entsprechen (14).

Es scheint mir manchmal so, als wenn in der neueren Zeit im Unterricht des kaufmännischen Rechnens von lauter sachlichen Belehrungen das eigentliche Rechnen zurücktrete, und darin liegt meines Erachtens eine grosse Gefahr. Unzureichende mathematische Bildung zeigt sich im kaufmännischen Rechnen vielfach in dem Mitschleppen von überflüssigen Ziffern, der eingebildeten Genauigkeit, der Scheu vor abgekürztem Rechnen. In dieser Richtung muss von Seiten des Mathematik immer wieder angekämpft werden. Merkwürdig ist es, dass man ein so bequemes Mittel wie die Potenzen von 10 im wirtschaftlichen Rechnen noch verhältnismässig selten antrifft. Die wahnsinnigen Zeiten, wo wir in Deutschland mit 10^{12}, d.h. einer Billion, rechnen mussten, werden hoffentlich nicht wiederkommen; aber trotzdem ist es doch zweifellos viel bequemer, statt vieler Nullen eine entsprechende Potenz

von 10 zu schreiben. Dass die uns heute unentbehrlichen Dezimalbrüche von einem holländischen Deichinspektor, der ursprünglich Buchhalter war, dem 1548 in Brügge geborenen Simon Stevin erfunden sind, mag bei Gelegenheit des Kongresses in Amsterdam doch besonders hervorgehoben werden. Die für das Denken und Arbeiten so vorteilhafte Folgerichtigkeit mathematischer Bezeichnungen wird merkwürdiger Weise in mancher Ländern bei Kursangaben nicht benutzt, wenn man z.B. eine Kurs findet 4,23½, d.h. also zunächst Dezimalbrüche und dann an dritter Stelle auf einmal einen Dualbruch. Sehr wünschenswert wäre es auch, wenn die von der Mathematik in ihrer internationalen Sprache doch schon sehr einheitlich gestalteten Rechenzeichen auch durchgängig im wirtschaftlichen Rechnen gebraucht würden. Es findet sich als Subtraktionszeichen im kaufmännischen Leben in Deutschland das Zeichen ÷, das andererseits in England m.W. gelegentlich noch als Divisionszeichen benutzt wird. Sehr zu bekämpfen ist auch der fehlerhafte Gebrauch des Gleichheitszeichens, wie man ihn in Rechenbüchern immer noch antrifft, z.B. $2 . 5 = = 10 + 3 = 13$. In einem aus neuester Zeit stammenden Lehrbuch der Zinseszins- und Rentenrechnung, das von zwei Diplomhandelslehrern verfasst ist, finden sich andauernd solche Verstösse gegen die Logik in der Form etwa $6 . 7 = \log . 6 + \log . 7$! Die Trennungszeichen bei mehrstelligen Ziffern solten international einheitlich geregelt werden. In Deutschland ist amtlich in der Massordnung das Dezimalkomma vorgeschrieben, und die Ziffern werden in Gruppen von je 3 ohne weiteres Trennungszeichen gesetzt, wie das deutlich die Berichte der deutschen Reichsbank zeigen. Ich empfinde es immer als störend, wenn Privatbanken ein Komma zur Trennung der Gruppen benutzen. Der Ausschuss für wirtschaftliche Verwaltung hat in einem Entwurf eines Merkblattes für wirtschaftliche Schreibmaschinenarbeit den Punkt als Trennungszeichen zwischen Gruppen vorgeschlagen neben dem Dezimalkomma. Ich halte den Vorschlag für nicht empfehlenswert; ein Punkt als Trennungszeichen ist neben dem Dezimalkomma m.E. überflüssig und irreführend wegen der Verwechslung des Punktes als Multiplikationszeichen.

Kalkulationsaufgaben lassen sich durch mathematische Ueberiegungen in sehr handliche Formeln bringen, wie ich z.B. auch von einem Kaufmann erfahren habe, der, mathematischer Auto-

didakt, durch theoretisch-astronomische Arbeiten in der wissenschaftlichen Welt sich sehr bekannt gemacht hat, auf Grund deren er auch von einer berühmten Fakultät zum Ehrendoktor ernannt worden ist. Ist x der Einkaufspreis und y der Verkaufspreis, so benutzt er einfach die lineare Beziehung $y = ax + b$, worin in den Konstanten a und b die immer wieder auftretenden Kosten, wie Frachten, Versicherungen u.s.w., ausgedrückt werden. Ich bin überzeugt, dass in dieser Richtung noch viel zu machen ist. Unbewusst arbeiten gewiss auch viele Einkäufer mit dieser Methode, deren mathematischer Kern herauszuschälen wäre.

Wesentliche Vereinfachungen könnte die Mathematik bei der Konstruktion von Steuertarifen, Frachttarifen und dergl. herbeiführen. In manchen Ländern z.B. in Australien hat man das auch schon eingesehen und mit mathematischer Hilfe solche Tarife vernünftig gemacht. Auch die Royal Economical Society erstrebt die Einführung von Steuerformeln. Die Deutsche Mathematikervereinigung, die Vertreterin der mathematischen Wissenschaft in Deutschland, hat im Jahre 1920 nach einem von Riebesell (15) in der mathematischen Abteilung der Nauheimer Naturforscherversammlung gehaltenen Vortrage in einem eingehend begründeten Antrage die deutsche Reichsregierung auf diese Frage hingewiesen und ihr nahegelegt, in diesen Dingen die Hilfe eines geschulten Mathematikers heranzuholen. Riebesell knüpfte u.a. an Anregungen an, die schon einige Jahre früher der Professor der Volkswirtschaft an der Frankfurter Universität Voigt gegeben hatte, dessen Publikationen freilich in mathematischer Beziehung etwas primitiv waren.

Wie mathematische Ueberlegungen in Steuerfragen eine grosse praktische Bedeutung gewinnen, zeigt die von dem Regierungsrat am sächsischen statistischen Landesamt Dr. Burkhardt gegebene und von der Regierung in die Praxis umgesetzte Lösung des Problems, einen sachgemässen Schlüssel für den den Ländern und Gemeinden zustehenden Anteil an dem Ertrag der Reichssteuern unter Berücksichtigung des örtlichen Steuereinkommens und der Bevölkerungszahl zu finden. Wesentlich hierbei ist die Benutzung der Methode der kleinsten Quadrate (16).

Mathematische Methoden gewinnen immer grössere Bedeutung in der für das Wirtschaftsleben so wichtig werdenden Konjunkturforschung. An der Harvard-Universität entstanden, wo man

zuerst ein solches Konjunkturbarometer konstruiert hat, ist der Gedanke der Konjunkturforschung jetzt an verschiedenen Stellen der Anlass zur Gründung solcher Institute geworden, in Berlin insbesondere mit Förderung des Deutschen Industrie- und Handelstages. Die Veröffentlichungen dieses Institutes zeigen, welche Bedeutung die mathematischen Methoden für das Verständnis dieser Erscheinungen haben. Insbesondere möchte ich auf eine der zuletzt erschienenen Arbeiten hinweisen, in der der Verfasser Dr. Lorenz einen Beitrag zur Methode der Berechnung des Trends liefert und seinen Auswertung für die Untersuchung von Wirtschaftskurven (17). Die vom Verfasser benutzten mathematischen Methoden erfordern gewisse mathematische Kenntnisse, die ein Studierender der Volkswirtschaft, der sich mit diesen Dingen beschäftigen will, sich erwerben muss, was auch ohne ein grosses mathematisches Studium sehr wohl möglich ist. Es genügen hierzu m. E. kleinere besondere Vorlesungen an Hochschulen, die an die Schultkenntnisse anknüpfen. Ausserdem liegen hier wohl ähnliche Verhältnisse vor, wie wenn man mit Recht verlangt, dass ein wissenschaftlich Arbeitender fremdsprachliche Fachliteratur verstehen muss. In Frankreich und Italien scheinen solche mathematische Vorlesungen üblich zu sein. An der Handelshochschule in Mannheim hat man erfreulicher Weise jetzt auch damit begonnen.

Die Statistik, die als Betriebsstatistik in der Wirtschaft immer wichtiger wird, braucht immer mehr mathematische Methoden. Aus der neuesten Zeit nenne ich in dieser Beziehung zwei Monographien: „mathematisch-graphische Untersuchungen über die Rentabilitätsverhältnisse eines Fabrikbetriebes" (19) und „Anwendung der mathematischen Statistik auf Probleme der Massenfabrikation". (20) Die Mathematik ist natürlich auch hier, wie in jedem Gebiet, in dem sie angewendet wird, nicht Selbstzweck. Die Statistik darf nicht, wie der so früh verstorbene hervorragende russische Statistiker Tschuprow sagt, ein Tummelplatz für mathematische Kunstschlittschuhläufer werden; die Hauptsache ist natürlich die Sachkenntnis, der Mathematiker liefert nur die ökonomischsten Methoden. Was aber der Mathematiker hier für die Wirtschaft leisten kann, zeigt mit überzeugender Begeisterung C. C. Morris, Professor der Mathematik an der Ohio University, in einem 1924 vor der amerikanischen Mathematischen Gesellschaft gehaltenen Vortrage „Mathematical Methods in economical Research". Er sagt (21):

He must know economic, but not to extend, that he is an idealist. He must know the calculus (d.i. Differential- und Integralrechnung), the theory of least squares, the theory of errors, the theory of probabilities, the theory and practice of statistical procedure. He must be a skilled computer; know when to use a slid rule and when to use a six place logarithme table. He must have a sense for accuracy and be able to tell at a glance whether dates are reasonable or not. He must know to fil the accuracy of his methods to the accuracy of his dates. He must associate with businessmen and learn something of their psychology.

Dass man bei nicht genügender mathematischer Bildung zu einem fehlerhaften Gebrauch mathematischer Formeln in der Statistik kommen kann, zeigen manche Veröffentlichungen der neueren Zeit, z.B. aus der für das kaufmännische Gebiet jetzt wichtig werdenden Berufseignungsforschung. Wie die Scheu vor klarer mathematischer Formulierung zu Unklarheiten führt, lässt der in neuester Zeit gemachte Versuch eines Doktors rer.pol. erkennen, den für die Versicherung so wichtigen Risikobegriff populär zu entwickeln.

Das Bestreben, die Klarheit mathematischer Formulierungen und mathematischer Sprache zu verwenden, hat in der Nationalökonomie namentlich Italiens zu einer besonderen wissenschaftlichen Schule geführt, deren Veröffentlichungen ich allerdings vom mathematischen Standpunkte aus, soweit ich sie kenne, etwas zurückhaltend gegenüberstehe, wenn ich es auch für sehr wohl möglich halte, dass man auf diesem Gebiete doch noch durch eine Art Axiomatik zu einer Missverständnisse ausschliessenden Sprache kommen kann (22). Jedenfalls halte ich es für notwendig, dass mathematisch genügend geschulte Volkswirtschaftler oder auch volkswirtschaftlich genügend geschulte Mathematiker diese Ideen auch in anderen Ländern verfolgen, wie das z.B. Böhm in einem auf der letzten deutschen Naturforscherversammlung 1928 in Hamburg in einem in der Abteilung für angewandte Mathematik gehaltenen Vortrag „Einige Bemerkungen über die Theorie des Preises (23)" gemacht hat. Wie das Problem des Geldwertes mathematisch zu fassen ist, zeigt v. Bortkievicz im Handwörterbuch der Staatswissenschaften (24). Ich mache hier auch auf ein neues Forschungsgebiet aufmerksam, die „Oekonometrie", die die abstrak-

ten Gesetze der theoretischen Nationalökonomie an beobachteten Zahlenwerten verifizieren will, wie es der Schöpfer dieses Begriffes der Norweger Ragnar Frisch, z.B. an dem von der Pariser Union des Coopérateurs ihm gelieferten Material über Zuckerpreise macht. Frisch schliesst seine Arbeit mit den Worten, denen ich durchaus zustimme: (25)

„Nous croyons que la théorie de l'économie politique est arrivée à un point de son développement où l'appel aux données numériques de l'expérience est devenu, plus nécessaire que jamais, en même temps que ses analyses ont atteint un degré de complexité qui demande l'application d'une méthode scientifique plus raffinée que celle employée par les économistes classiques."

Ich habe bisher von der Anwendung der Mathematik gesprochen; die Mathematik hat aber auch eine formal bildende Aufgabe, die im vorigen Jahrhundert unter dem Einfluss des Neuhumanismus sogar vielfach als einzige Aufgabe des mathematischen Schulunterrichtes angesehen wurde. Dagegen machte sich in den letzten Jahrzehnten des 19. Jahrhundert eine starke, oft geradezu mathematikfeindliche Strömung bemerkbar, aus der heraus dann jene in weiteren Kreisen bekanntgewordene Bewegung zur Reform des mathematischen Unterrichtes erwachsen ist ganz wesentlich unter dem Einfluss des Göttinger Mathematikers Felix Klein, des Präsidenten der auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Rom 1908 auf Anregung des Amerikaners D. E. Smith begründeten Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission. Sie hatte die Aufgabe, das Ganze des mathematischen Unterrichtes aller Länder und aller Schularten von der untersten Stufe bis zu der höchsten darzustellen. Die zahlreichen Publikationen dieser IMUK enthalten auch für die kaufmännischen Schulen sehr wertvolles Material, worauf ich bei dieser Gelegenheit doch ganz besonders hinweisen möchte, da diese Abhandlungen in den Handelsschulkreisen nicht genügend bekannt geworden zu sein scheinen (26).

Die mathematische Unterrichtsreform der neueren Zeit erkennt als Bildungsziel neben dem formal bildenden, rein logischen Moment die Ausbildung der räumlichen Anschauung und der Fähigkeit, mathematische Ueberlegungen in konkreten Fällen auch wirklich anwenden zu können. Infolge dieser Unterrichtsreformbewegung hat man auch an den Universitäten wieder mehr Interesse

für die Anwendungen bekommen und im Zusammenhang damit an mehreren deutschen Hochschulen z.B. die Möglichkeit geschaffen, dass Mathematiker in der Prüfung für das Lehramt an höheren Schulen als Sondergebiete mathematische Statistik, Finanz- und Versicherungsmathematik wählen können (27).

Wie immer bei solchen Bewegungen schlug in der Folgezeit das Pendel öfter zu sehr nach der anderen Seite aus, und so zeigt sich jetzt im Zusammenhang mit der durch die ganze Welt gehenden alogischen, auf Empfindungen und Erlebnisse eingestellten Philosophie oft eine zu starke Zurückdrängung der rein logischen Aufgabe des mathematischen Unterrichtes. Darum dürfte eine Warnung angebracht sein mit dem deutlichen Hinweis darauf, dass der mathematische Unterricht auch auf den Handelsschulen die notwendige Aufgabe hat, das logische Gewissen zu schärfen, wobei man sehr gut immer Parallelen aus den Vorgängen des praktischen Lebens heranholen kann, eine reizvolle didaktische Aufgabe über die ich hier nicht ausführlicher mit Rücksicht auf den hier zur Verfügung stehenden Raum mich aussprechen kann. Der mathematische Unterricht hat aber auch auf den Handelsschulen den Zusammenhang mit der allgemeinen Kulturentwicklung zu zeigen und die Bedeutung rein theoretischer Untersuchungen hervorzuheben, die nicht unmittelbar praktisch anzuwenden sind.

Wie nach meiner Auffassung und siebzehnjährigen Erfahrung der mathematische Unterricht einer höheren Handelsschule, dem bald hundert Jahre alte Sächsischen Typ einer vierklassigen Handelsrealschule, die wöchentlich drei (bezw. 2 in der untersten Klasse) Stunden für Mathematik zur Verfügung hat neben besonderem Unterricht natürlich im kaufmännischen Rechnen, ein zeitgemässes mathematisches Bildungsziel erreichen kann, möge folgender Lehrplan zeigen: (28)

Lehrziel.

Entwicklung des Zahlensinnes und Pflege der Raumanschauung. Verständnis der gegenseitigen Abhängigkeit veränderlicher Grössen. Gewöhnung an vorsichtiges Schliessen und planmässiges Vorgehen beim Lösen von Aufgaben. Uebung in der mathematischen Formulierung praktischer Aufgaben, sowie im Gebrauch von Formeln und Tabellen.

Lehraufgaben.

IV. Klasse. 2 Stunden.

Anschauliche Entwicklung der geometrischen Grundbegriffe und der Eigenschaften körperlicher und ebener Gebilde. Sicherheit im Gebrauch

des Lineals, des rechtwinkligen Dreiecks und des Zirkels. Spiegelung. Drehung und Kongruenz. Einfache Dreieckkonstruktionen.

III. Klasse. 3 Stunden.

Einführung in die Buchstabenrechnung an der Hand von eingekleiten und reinen linearen Gleichungen mit einer Unbekannten. Anwendung derFo rmeln $(a \pm b)^2$; $(a + b) . . (a - b)$ auch auf das Kopfrechnen. Erweiterung des Zahlbereichs auf die negativen Zahlen an der Hand der Zahlengeraden. Einfache graphische Darstellungen. Graphische Auflösung von Bewegungsaufgaben.

Parallelogramm, Trapez, Kreis, geometrische Oerter.

II. Klasse. 3 Stunden.

Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten algebraisch und graphisch. Einfache Fälle von mehreren Unbekannten. Zusammenfassung der schon früher im Rechnen benutzten Potenzgesetze. Erweiterung auf Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten. Proportionalitätsfaktor. Die Hyperbel als Beispiel für indirekte Proportionalität z.B. Zinsdivisor und Prozentsatz. Berechnung der Quadratwurzel durch Einschliessen in Grenzen und aus einer Tabelle; auch mit einem Nomogramm. Die Parabel als Bild der Funktion $y = ax^2$.

Satzgruppe des Pythagoras. Aehnliche Abbildung. Inhalt geradlinigbegrenzter Flächen; Inhalt und Umfang des Kreises.

I. Klasse. 3 Stunden.

Die Exponentialfunktion. Logarithmen (4 stellig). Berechnung einiger Logarithmen durch Einschliessen in Grenzen. Zinseszinsrechnung. Einfache Beispiele aus der Renten- und Tilgungsrechnung. Die Funktion 2. Grades graphisch unr rechnerisch. Die Winkelfunktionen. Sinus- und Kosinussatz. Darstellung einfacher Körper in senkrechter und schräger Parallelprojektion. Berechnung einfacher Körper.

Erläuterung.

Die zur Verfügung stehende geringe Stundenzahl erfordert eine strenge Sichtung des Stoffes. Nur dann ist es möglich, eine ausreichende mathematische Bildung zu erzielen. Verwickelte Dreieckkonstruktionen und verkünsteltes Buchstabenrechnen sind durchaus zu vermeiden. Ausgeschieden ist auch der übliche Algorithmus der Quadratwurzel. Ausdrücklich nicht genannt sind auch die in vielen Lehrplänen noch vorkommenden Wurzelgesetze, weil sich das für das Rechnen mit Wurzeln Notwendige sofort aus der Erweiterung des Potenzbegriffes, auch für gebrochene Exponenten, ergibt.

Nicht genannt sind in der ersten Klasse die Reihen, weil es nicht nötig ist, sie als solche ausführlich zu behandeln: bei der Einführung der Logarithmen ergibt sich ungezwungen die Gegenüberstellung einer arithmetischen und geometrischen Reihe; Die Zinseszinsrechnung führt zu der geometrischen Reihe, und die Körperberechnung kann mit Hilfe der Summe der Quadratzahlen durchgeführt werden, wobei diese Summe als eine Funktion 3. Grades leicht zu berechnen ist.

Bei den schriftlichen Arbeiten ist die grösste Sorgfalt auf die Form zu legen. Die numerischen Rechnungen sind übersichtlich anzuordnen. Die Entwicklung ist in gutem Deutsch zu geben. Die Schüler sind daran zu gewöhnen, stets die erlangten Resultate kritisch zu betrachten und bei numerischen Aufgaben immer eine Abschätzung vorzunehmen.

Wesentlich für die mathematische Bildung ist die Verbindung der einzelnen Gebiete, wie sie durch den Funktionsbegriff geliefert wird. Geschichtliche Hinweise sind an manchen Stellen angebracht, insbesondere um erkennen zu lassen, wie durch mathematische Begriffe und durch die mathematische Sprache eine Oekonomie des Denkens erzielt wird.

Daher ist auch eine Beziehung zu dem kaufmännischen Rechnen, als einem Teilgebiet der angewandt en Mathematik, immer wieder zu zeigen.

Die wegen des beschränkten Raumes nur skizzenhaft darstellbaren Ideen über die Bedeutung der Mathematik für die Wirtschaftswisscnschaften und den wirtschaftwissenschaftlichen Unterricht möchte ich in folgenden Leitsätzen zusammenfassen:

1. Das kaufmännische Rechnen ist ein Teilgebiet der angewandten Mathematik und soll daher die zeit- und kraftsparenden Vorteile mathematischer Denkweise ausnutzen.

2. Der Lehrer des kaufmännischen Rechnens sollte deshalb mathematisch soweit geschult sein, dass er den allen Rechnungen zugrunde liegenden mathematischen Gedanken selbst klar erkennt. Für die Ausbildung der Handelslehrer an den Handelshochschulen und den wirtschaftswissenschaftlichen Fakultäten ist daher die Möglichkeit zu schaffen, durch besondere Vorlesungen prizipielle Fragen über die Zahlen und ihre einfachsten Gesetze, über angenähertes Rechnen, über Rechenmaschinen und ähnliches, aber auch über die Geschichte der Mathematik zu erörtern.

3. Studierenden der Volkswirtschaft ist zu empfehlen, sich die mathematischen Grundlagen zu verschaffen, die zum Verständnis der modernen statistischen Untersuchungen für sie erforderlich sind. Es kann das durch eine an den Schulunterricht anknüpfende vierstündige Vorlesung vielleicht einigermassen erreicht werden.

4. Der mathematische Unterricht an den höheren Handelsschulen und den Wirtschaftsoberschulen hat mit der Beseitigung allen veralteten Ballastes nicht einseitig nur unmittelbar praktische Aufgaben der Wirtschaft zu behandeln; er muss die allgemeine Bildungsaufgabe der Mathematik gerade auch im Gegensatz zu dem

unmittelbar Praktischen berücksichtigen. Er erfordt daher aber auch Lehrer, die, über der Sache stehend, ein gründliches mathematisches Studium durchgemacht haben.

ANMERKUNGEN.

(1) A. Eisenlohr Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter (Papyrus Rhind des Britischen Museums). Leipzig, J. C. Hinrichssche Buchhandlung, 1877.

T. Erik Peet, The Rhind mathematical Papyrus. Hodder & Stoughton, London, 1928.

(2) Unter „welscher Praktik" versteht man in der deutschen Literatur das Zurückführen gesuchter Ergebnisse auf schon ermittelte durch Addition oder Subtraktion einfacher Bruchteile des Ermittelten. Vergl. z.B. Friedrich Unger, Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwicklung vom Ausgang des Mittelalters bis auf die Gegenwart. Nach den Originalen bearbeitet. Leipzig, B. G. Teubner, 1888.

(3) Auch in England ist namentlich unter dem Einfluss des Ingenieurs Perry eine starke Bewegung gegen das starre Festhalten an Euklid vor längerer Zeit entstanden. Vergl. z.B. G. Wolff der mathematische Unterricht der höheren Knabenschulen Englands.

Berichte u. Mitteilungen veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichtskomission. Zweite Folge II Leipz. u. Berlin 1915. B. G. Teubner.

(4) Aus dem 18. Jahrhundert ist als rühmliche Ausnahme der Professor der Mathematik am Gelehrten-Gymnasium in Hamburg, J. G. Büsch, zu nennen, der Gründer der ersten Handelsakademie. Von ihm stammt ein „Versuch einer Mathematik zum Nutzen und Vergnügen des bürgerlichen Lebens", Hamburg, 1773. Im 19. Jahrhundert war in der ersten Hälfte und zum Teil bis in die neuere Zeit in Freiburg und Heidelberg eine Vorlesung unter dem Titel „Politische Arithmetik" üblich, die mit Zinsrechnung begann und bis zur Versicherungsrechnung aufstieg. An diese Tradition knüpft auch der jetzige Freiburger Ordinarius der Mathematik Alfred Loewy an mit seinem ausgezeichneten klaren Buch „Mathematik des Geld- und Zahlungsverkehrs", Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1920.

Das Buch scheint in den Kreisen der Studierenden der Handelshochschulen leider nicht genügend beachtet zu sein, obwohl doch die Zeit vorüber sein sollte, wo man in den Vorlesungen an den Handelshochschulen eine so geringe Fähigkeit abstrakten Denkens voraussetzte, dass als besonderer Lehrsatz, auch gedruckt, verkündet wurde; der dritte Zinsfaktor mal dem vierten Zinsfaktor gibt den siebenten Zinsfaktor.

(5) Dass die Angabe des Zinsfusses in Prozenten ein „Rätsel" enthalten solle, wie der Professor der Nationalökonomie an der Göteburger Handelshochschule Silverstolpe in seiner in den nordischen Ländern sehr verbreiteten unt jetzt auch in deutscher Uebersetzung (Leipzig 1929 A. Deichertsche Verlagbuchhandlung) erschienenen sehr angenehm zu lesende „Nationalökonomie für alle" behauptet,

sehe ich nicht ein. Früher wurde der Zins gelegentlich in anderen Bruchteilen angegeben. Uebrigens wäre es meines Erachtens besser, auch in der kaufmännischen Arithmetik allgemein das in der Versicherungsmathematik übliche internationale Sybol i für den Zins der Kapitaleinheit in der Zeiteinheit zu benutzen, so dass also p = 100 i ist. In einer neueren, für höhere Handelsschulen bestimmten Finanzmathematik ist irrtümlich der Zinsfaktor mit i bezeichnet.

(6) P. Zühlke, Politische Mathematik. Schule und Leben. Schriften zu den Bildungs- und Kulturfragen der Gegenwart. Herausgegeben vom Zentralinstitut für Erziehung und Unterricht. Berlin 1923. Heft 8, Seite 14. Der Verfasser, Oberschulrat in Kassel und Honorarprofessor für Didaktik der Mathematik an der Universität Marburg, versteht unter „politischer Mathematik" die Anwendung mathematischer Methoden auf das Wirtschaftsleben. Weil er Arithmetik und Geometrie benutzt, gebraucht er den Ausdruck Mathematik an Stelle des früher üblichen „politische Arithmetik".

Wie ich zufällig dem Katalog der Oxford University Press entnehme, ist 1904 „a geometrical political Economy, being a Treatise on the methods of explaining some of the theories of pure Economic Science by means of diagrams" erschienen, verfasst von Henry Cunynghame.

(7) Vergleiche z.B. R. V. Mises, Die Bewegung des Dollarkurses. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Band 2, 1922, p. 306—312.

(8) P. Luckey, Abbaco per il calcole anualità. Giornale di Matimatica finanziaria, VII (1925), S. 248—250.

P. Luckey, Nomogramme für Kapitaltilgungen. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Band 6, 1926, Seite 327—329.

P. Luckey, Nomographie. Mathematisch-physikalische Bibliothek Band 59/60, Leipzig und Berlin, 1927 B. G. Teubner.

(9) M. Kraitchik, Les Tables graphiques finanzières, Paris (1920), Gauthier-Villars. Verfasser ist Ingenieur der „Société finanzière de transports et d'entreprises industrielles" und Direktor à l'Institut des Hautes Etudes de Belgique. Er hat im gleichen Verlag 1922 auch eine Zahlentheorie veröffentlicht, die eine Fülle konkreter numerischer Beispiele enthält und für die der Schöpfer der Nomographie d'Ocagne ein interessantes Vorwort geschrieben hat. S. Anmerkung 12.

(10) J. Mounier, Les graphiques du patron donnant une solution immédiate approchée de tous problèmes de Banque, intérêts, escompte, prix de vente, placements. Paris (1920), Gauthier-Villars.

(11) Gauss hat z.B. die obengenannte „welsche Praktik", die er schon mit acht Jahren aus einem Rechenbuch kennen gelernt hatte, mit ungewöhnlichem Geschick angewandt. Vgl. Ph. Maennchen, Die Wechselwirkungen zwischen Zahlenrechnen und Zahlentheorie bei C. F. Gauss, Materialien für eine wissenschaftliche Biographie von Gauss. Gesammelt von F. Klein, M. Brendel und L. Schlesinger, Heft VI, Leipzig, B. G. Teubner, 1918.

(12) Vergl. z.B. Dr. Gottfried Rückle, Praxis des Zahlenrechnens. Rom. Verlag. R. Otto Mittelbach. Charlottenburg, 1925.

(13) Vergl. z.B. Lothar Schrutka, Zahlenrechnen. Sammlung mathe-

matisch-physikalischer Lehrbücher. Leipzig und Berlin, 1923, B. G. Teubner.

(14) Vergl. D. Katz, Psychologie und mathematischer Unterricht. Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland, veranlasst durch die Internationale Mathematische Unterrichts-kommission, Band III, 8. Leipzig und Berlin, 1913, B. G. Teubner. Nr. 32 vgl. Anmerkung (26).

(15) P. Riebesell, Die neuen Reichssteuertarife vom mathematischen Standpunkt. Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft. 35. Jahrgang, 1920, Seite 469—477.

(16) F. Burkhardt, Ueber ein finanzstatistisches Verteilungsproblem. Deutsches statistisches Zentralblatt, 1926. Nr. 5/6.

(17) Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung. Sonderheft 9. Berlin, 1928. Reimar Hobbing.

(18) Vergl. z.B. Frechet et Halbwachs. Le calcul des probalitités à la portée de tous. Paris, 1924, Dunod. Die Verfasser, Professoren der Universität Strassburg, sind nebenamtlich am „Institut commercial de l'Enseignement supérieure" in Strassburg tätig für Versicherungsmathematik bez. Statistik, und daraus ist das Buch entstanden. F. Insolera, Complementi di Matematiche generali per gli studenti degli Instituti supériori di scienze economiche e commerciali. Torino-Genova, 1924, S. Latter & Co. Der Verfasser ist ordentlicher Professor der Finanzmathematik an der Handelshochschule in Turin und Herausgeber des in Anmerkung 8 genannten Giornale di Matematica finanziaria.

(19) Reinhard Hildebrandt, Mathematisch-graphische Untersuchungen über die Rentabilitätsverhältnisse des Fabrikbetriebes. Berlin, 1925, Julius Springer.

(20) Becker, Plaut und Runge, Anwendungen der mathematischen Statistik auf Probleme der Massenfabrikation. Berlin 1927, Julius Springer.

(21) The American Mathematical Monthly, Vol. XXI, 1924, Seite 57f.

(22) V. Pareto, Anwendungen der Mathematik auf Nationalökonomie. Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. Leipzig und Berlin, Band I, 2, Seite 1094—1120, B. G. Teubner.

Barone—Staehle, Grundzüge der theoretischen Nationalökonomie. Bonn, 1927. Kurt Schröter.

Otto Kühne, die mathematische Schule in der Nationalökonomie Band I 1 Teil, die italienische Schule (bis 1914). Sozialwissenschaftliche Forschungen Abteilung I Heft 8.

Berlin und Leipzig 1928. Walter de Gruyter & Co.

F. Divisia, Economique rationelle. Paris, 1928, Gaston Doin et Cie. Das Buch ist in der von d'Ocagne geleiteten Bibliothèque de Mathématiques appliquées erschienen. Aus der von M. C. Colson verfassten Vorrede sei folgende Stelle angeführt (S. XXIV): Les chefs des services de toute nature qui emploient des jeunes gens à formation exclusivement scientifique se plaignent tous aujourd'hui de leur incapacité fréquente à exposer leurs idées dans des rapports bien composés et bien rédigés. Par contre la plupart des étudiants, trop

nombreux, qui abordent les questions économiques sans avoir appris l'essentiel des sciences physiques et mathématiques, éprouvent une extrême difficulté aussi bien à saisir le sens et la portée de l'observation, précise qu'à en déduire les conséquences.

(23) Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik. Band 8, 1928. S. 439—443.

(24) Artikel „Geld". Handwörterbuch der Staatswissenschaften. 4. Aufl. Band 4. 1926. Seite 743—752.

(25) Sur une problème d'économie pure. Norsk matematisk Forenings skrifter. Serie 1, Nr. 16. Oslo, 1926.

(26) Von diesen Abhandlungen der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (IMUK) haben folgende besondere Bedeutung für Handelsschulen:

Die Nummern hinter jeder Abhandlung sind die des von dem Generalsekretär der „Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission" H. Fehr (Professor der Universität Genf) zusammengestellten Verzeichnisse.

L'enseignement mathématique XXIe Année (1920). Seite 319 bis 342.

Timerding, Die kaufmännischen Aufgaben im mathematischen Unterricht der höheren Schulen. (Deutsche IMUK, III, 5, 1911). Nr. 29.

Penndorf, Rechnen und Mathematik im Unterricht der Kaufmännischen Lehranstalten. (Deutsche IMUK, IV, 6, 1912). Nr. 39.

Dolinski, Der mathematische und physikalische Unterricht an den höheren Handelsschulen. (Oosterreichische IMUK, Heft 2, 1910). Nr. 73.

Einen zusammenfassenden Bericht über die verschiedenen Länder bringt K. H. Taylor, Mathematics in the Lower and Middle Commercial and Industrial Schools of various Countries represented in the International Commission on the Teaching of Mathematics. Burau of Education. Washington Bulletin Nr. 662 (1915). Nr. 123.

M. P. Mineur, Rapport sur l'enseignement mathématique dans les établissements de la chambre de commerce de Paris. (Französische IMUK). Nr. 162.

M. Havas und S. Bogyo, der mathematische Unterricht an den Handelsschulen. (Ungarische IMUK Heft 7, 1912) Nr. 192.

A. L. Bowley, the undergraduate Course in Pass Mathematics generally and in relation to Economics and Statistics. (Englische IMUK). Nr. 219.

Lazzeri, Scuole industriali, professionali e commerciali (Italienische IMUK, 1912). Nr. 234.

G. Sawada, Commercial schools and colleges. (Japanische IMUK, 1913. Nr. 250.

Morf, Les Mathématiques de l'Enseignement commercial suisse. (Schweizer IMUK, 1912). Nr. 290.

Auslieferungsstelle für alle IMUK-Abhandlungen ist die Buchhandlung Georg & Co., Basel und Genf.

Erfreulicherweise hat der „Internationale Mathematiker Kongresz", der im Sept. 1928 in Bologna stattfand, auf Anregung des Herrn Fehr beschlossen die durch den Krieg unterbrochenen Arbeiten der „Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission" wieder aufzunehmen. An Stelle des 1925 verstorbenen Präsidenten Felix Klein wurde

W. Lietzmann (Göttingen) als deutscher Vertreter in das Zentralkomite gewählt.

(27) Vergl. W. Lorey, Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts. (Deutsche IMUK III, 9, Seite 257—260, 1916).

Das man auch in anderen Ländern an den Universitäten solchen Anwendungen der Mathematik Interesse entgegenbringt, beweist die aus dem mathematischen Laboratorium und Seminar der Universität Madrid, 1917 hervorgegangenen Arbeit: F. S. Arena Herrero, operaciones finanzieras.

(28) Vergl. hierzu auch W. Lorey, Handelsrealschulen, (Sächsische) Höhere Handelsschule und Sächsische Wirtschaftsoberschulen, Handbuch des Berufs- und Fachschulwesens. Im Auftrage des Zentralinstituts für Erziehung und Unterricht herausgegeben von Dr. A. Kühne. 2. Auflage, 1929, S. 405—416. Leipzig. Quelle & Meyer.

ERGÄNZUNG.

Das vorstehend abgedruckte Referat lag mit den Anmerkungen dem Internationalen Kongress für das kaufmännische Bildungswesen, der vom 2. bis 5. September 1929 in Amsterdam stattfand, gedruckt vor. Es veranlasste beim Kongress eine ausgedehnte Debatte, die in dem zweiten Band der Verhandlungen Seite 236-246 wörtlich abgedruckt ist. Aus den Ausführungen, mit denen ich selbst die Debatte einleitete, sei hier folgendes wiedergegeben:

Zweck meines Referates ist es die Wirtschaftskreise, die vielleicht auf Grund der Erinnerung an einen längst vergangenen eigenen Unterricht der Mathematik ablehnend gegenüberstehen, für die Frage zu interessieren. Als günstiges Zeichen sehe ich es daher an, dass die Kongressteilnehmer bei der Rundfahrt durch Amsterdam die inhaltsreiche wirtschaftsgeschichtliche Ausstellung im städtischen Museum besuchen konnten, wo das Werk des in meinem Bericht auch genannten Lucca Paccioli ausgestellt ist und daneben das schöne aus Neapel entliehene Bild.

Die Mathematik hat als Unterrichtsgegenstand nicht allein die formale Aufgabe der Verstandesbildung. Die grosse Reformbewegung, die seit Anfang unseres Jahrhunderts in verschiedenen Ländern einsetzte, hat der Mathematik andere wichtige Aufgaben zugewiesen. Mögen die Lehrplanänderungen, die im Zusammenhang mit dieser internationalen Reformbewegung jetzt auch in Holland geplant sind, auf die Wirtschaftsschulen dieses Landes einwirken!

Gegenüber der Zurückhaltung, die man in Kaufmannskreisen dem Rechenstab noch zeigt, war es mir eine ganz besondere Freude, von einem in Holland lebenden ehemaligen Schüler der Leipziger Oeffentlichen Höheren Handelslehranstalt in den Kongresstagen zu

erfahren, dass er auf Grund der in der Schule empfangenen Anregungen stets den Rechenstab auf seinen Reisen mitführt. Derselbe Herr hat für die Abteilung der Firma, die er zu leiten hat, Kurven konstruiert, mit denen immer wiederkehrende Rechnungen sehr schnell erledigt werden können. Dass bei allen rechnerischen Hilfsmitteln das Kopfrechnen aber nicht zu vernachlässigen ist, möchte ich hier noch besonders betonen, da mir vor wenigen Tagen erst die Aeusserung eines Volksschullehrers mitgeteilt worden ist, der auf die Beschwerde, dass seine Schüler nicht ordentlich im Kopfe rechnen könnten, meinte, das sei heutzutage nicht mehr nötig. Für die Anwendungen der Mathematik in der Wirtschaftswissenschaft und der Betriebsstatistik verweise ich auch noch auf ein mir in den Kongresstagen von Herrn Dr. Elte (Haarlem) vorgelegtes Buch: Robert Riegel, Elements of Business Statistics, (Verlag D. Appleton and Company—New York und London, 1927). Ein Blick in dieses Buch erhärtet die Notwendigkeit der Leitsätze 2 und 3 meines Referates.

Der Mathematiker muss sich darüber klar sein, dass die Mathematik für diese Gebiete des Wirtschaftslebens nur ein Hilfsmittel ist. Aber andererseits darf der mathematische Unterricht in den Wirtschaftsschulen nicht nur die wirtschaftlichen Anwendungen wie Finanzmathematik u.s.w. berücksichtigen. Das würde zu einer Verödung führen. Der mathematische Unterricht muss auch in den Wirtschaftsschulen den Ewigkeitswert mathematischer Untersuchungen wenigstens an Beispielen den Schülern zum Bewusstsein bringen. Die mathematische Wissenschaft arbeitet auf Vorrat. Als Apollonius im Altertum sein grosses Werk über die Kegelschnitte schrieb, dachte man gewiss an keine Anwendung, wie sie viel später durch Kepler in der Astronomie gemacht wurde, geschweige denn an Erläuterungen des theoretischen Diskontierens durch eine Hyperbel, wie ich sie in meinem Referat angegeben habe.

Zu dem auf Seite 110 ff. abgedruckten Lehrplan sei ergänzend auch noch der für die Wirtschaftsoberschule, einen neuen zur Hochschulreife führenden Typ, der zur Zeit an vier sächsischen höheren Handelsschulen entsteht, entworfene Plan der drei oberen Klassen Obersekunda bis Oberprima angegeben:

O II. 3 Stunden. Durch Gegenüberstellung einer arithmetischen und geometrischen Reihe Einführung in die Logarithmen, Berechnung einiger Logarithmen durch Enschliessen in Grenzen.

Rechenschieber. Zinseszinsrechnung und einfache Beispiele aus der Rentenrechnung. Erweiternde Behandlung der Funktionen zweiten Grades. Das Steigungsverhältnis (Differentialquotient) ganzer Funktionen mit Anwendung auf einfache Maxima- und Minimaaufgaben. Die trigonometrischen Funktionen bis zur Periodizität. Sinus- und Kosinussatz mit Anwendung auf einfache Aufgaben, z.B. auch aus Nautik. Darstellung einfacher Körper in senkrechter und schräger Parallelprojektion. Berechnung einfacher Körper.

U I und O. I. Je 4 Stunden. Zusammenfassung der bisher schon

benutzten Methoden der analytischen Geometrie zu einem ausreichenden System.

Zusammenfassende Behandlung der bisher schon benutzten Funktionen. Berechnung ihres Steigungsverhältnisses. Annäherung durch ganze Funktionen und Interpolationen. Konstruktion von Nomogrammen. Aufbau des Zahlenbereichs bis zu den komplexen Zahlen. Weitere Einführung in Methoden der darstellenden Geometrie mit Anwendung auch auf mathematische Geographie (Kartenprojektion).

Elemente der Versicherungsmathematik und der mathematischen Methoden der Statistik. Einfache Integrationen mit Anwendung auf Inhaltsberechnungen. Zusammenfassender Rückblick unter Verwendung historischer und philosophischer Gesichtspunkte.

ERLÄUTERUNG.

Der Zusammenhang der einzelnen mathematischen Gebiete, wie er durch den Funktionsbegriff geliefert wird, muss den Schülern zum lebendigen Bewusstsein gebracht werden. Anwendungen sind aus den verschiedensten Gebieten zu wählen mit sorgfältiger numerischer und zeichnerischer Durchführung. Die Ergebnisse sind vorher aber immer abzuschätzen. Bei den schriftlichen Arbeiten ist auf eine sorgfältige und klare Gedankenentwicklung zu achten. Bei aller Betonung des praktischen Wertes der Mathematik ist aber auch ihr idealer Ewigkeitswert den Schülern klarzumachen. Zu empfehlen ist gelegentlich die Lektüre von Abschnitten aus klassischen mathematischen Abhandlungen.

Leipzig, Februar 1930. W. LOREY.

BOEKBESPREKING.

Geometrische Konfigurationen. Mit einer Einführung in die kombinatorische Flächentopologie von Prof. Dr. Friedrich Levi, Universität Leipzig. Mit 58 Abb., VIII und 310 Seiten. (Preis Rm. 24, geb. Rm. 26, Verlag S. Hirzel, Leipzig).

„Die geometrischen Konfigurationen sind aufs innigste verflochten mit allen Teilen der Mathematik, in denen die kombinatorischen überlegungen vorherrschen. Sie stehen in ebenso engen Beziehungen zur Algebra, insbesondere der Gruppentheorie, wie zur Topologie und zu der Geometria situs; auszerdem ergeben sich von hier aus zuweilen interessante Ausblicke auf andere Teile der Mathematik (Zahlkörper, Kinematik, Statik, Nicht-Euklidische Geometrie). Die Darstellung dieser Zusammenhänge ist das eigentliche Ziel des Buches. Dementsprechend beschränkt sich der Verfasser hauptsächlich auf die wichtigsten reellen Konfigurationen."

Aldus de aankondiging van dit fraaie en degelijke boek, en in het Voorwoord zegt de schrijver uitvoeriger ongeveer hetzelfde.

Strekking en opzet van zijn werk, dat hij zich denkt in handen van jongere studenten of van afgestudeerden, die later weder met de wiskundige wetenschap in contact willen komen, zijn hiermede duidelijk gesteld en inderdaad wordt die strekking steeds in het oog gehouden en die opzet stipt uitgevoerd.

Zoo geeft Hoofdstuk I eene korte uiteenzetting van die begrippen en stellingen uit de groepentheorie, welke later zullen worden toegepast, eene paragraaf wordt gewijd aan de automorphismen der symmetrische groep S_m, met het bijzonder geval $m = 6$, eene andere aan de groepen van oneindige orde: vrije groepen en groepen met relaties.

Hoofdstuk II behandelt in zéér gedrongen vorm de beginselen der combinatorische topologie van oppervlakken. De 50 blz., die de schr. aan dit in den ondertitel van zijn boek afzonderlijk genoemde onderwerp besteedt, vormen een beknopt doch uitstekend leerboek op zichzelf, waarin men slechts een paar maal aan configuraties herinnerd wordt. Het zou mij dan ook niet verbazen, als menigeen het boek ter hand nam alleen om daarin Hoofdstuk II te bestudeeren, in elk geval is het voor dit beperkte doel uitnemend geschikt.

De vier overige hoofdstukken zijn verder gewijd aan het eigenlijke onderwerp: de configuraties. Uit den overrijken voorraad van deze door hare sierlijke ingewikkeldheid zoo aanlokkelijke figuren wordt viermaal een greep gedaan; in de voor hem gedane keuze heeft de lezer natuurlijk te berusten, ze is door eene doelbewuste hand geschied.

Hoofdstuk III bespreekt de Cff. n_3, in het bijzonder de gevallen $n = 7$, 8 en 9, voorts de paren elkander omgeschreven viervlakken, in het bijzonder die van Möbius, en ten slotte de netten van rechten in het projectieve vlak; hoofdstuk IV de polyedrale Cff. (in het bijzonder de Cf. van Desargues) met toepassingen op cinematica en statica. In beide hoofdstukken worden de groepentheoretische en de topologische voorkennis uit I en II op ruime schaal toegepast, vooral de beschouwingen over aantal en vorm der cellen, waarin de betreffende cff. vlak of ruimte verdeelen, zijn interessant.

Hoofdstuk V geeft, in 57 blz., eene volledige analyse der figuur van Pascal; dit hoofdstuk kan zonder eenig bezwaar als eene afzonderlijke monografie worden gelezen, de lezer heeft daarbij nog slechts eene in Hoofdstuk I voorkomende aanwijzing over de gebezigde notatie, alsmede het daar behandelde omtrent de automorphismen der S_6 noodig — een ander gevolg van de geïsoleerde stelling van dit vijfde hoofdstuk is natuurlijk, dat het evenzeer zonder stoornis voorloopig kan worden uitgesteld of geheel overgeslagen. Van vroegere behandelingen van het hexagramma onderscheidt zich die van schr. door de stelselmatige en duidelijke notatie en door eene sterk schematiseerende rekenwijze.

Met Hoofdstuk VI, gewijd aan de regelmatige veelvlakken en de regelmatige polygoonnetten in Euclidische en niet-Euclidische ruimten, wordt weder een minder in zichzelf afgerond terrein betreden. Telkens komt nu de samenhang aan den dag met de onderwerpen der hoofdstukken I en II, waarop schr. dan ook het volle licht laat vallen. Zoo in § 5 Polyedertheorie und binäre Substitutionen en in § 10 en 11 Anwendung der regelmäszigen Polygonnetze auf die Flächentopologie. Die Fundamentalgruppen. Hierdoor kan, dunkt mij, hoofdstuk VI met meer recht dan III, IV of V als de natuurlijke voortzetting van hoofdstuk II worden beschouwd.

Dat dit aan inhoud zoo rijke boek, waaraan door den schrijver geen arbeid is gespaard — ook waar hij zeer bekende zaken behandelt treft die behandeling door ongewoonheid en originaliteit — niettemin in zeker opzicht een ietwat onbevredigenden indruk achterlaat, is misschien te wijten aan de keuze van den titel, welke geometrische verwachtingen opwekt, die de schrijver niet voornemens is te vervullen.

De fraaiste configuraties toch zijn oorspronkelijk niet als combinatorische en topologische opgaven gesteld en door oplossing dier opgaven langs analytischen weg verkregen, maar kant en klaar uit bepaalde meetkundige problemen ontsprongen — over deze problemen hooren wij (het simpele geval der stelling van Pascal daargelaten) principiëel niets, zoo wordt bijv. bij de viervlakken van Möbius niet gerept van nulsysteem of lineair complex. Dit is nu eenmaal het, uitsluitend analyseerende, standpunt waarop zich de schrijver voorbedachtelijk plaatst.

In het voor ons liggende deel althans — een vervolg daarop stelt hij in uitzicht, wellicht dat hij ons daarin, op zijne steeds welovervogen en zeer persoonlijke wijze, ook eens iets van het geometrisch ontstaan van configuraties laat zien. Barrau.

Weitzenböck (Prof. Dr. Roland). Der vierdimensionale Raum (Die Wissenschaft, Sammlung von Einzeldarstellungen aus den Gebieten der Naturwissenschaft und der Technik, herausgegeben von Prof. Dr. W. Westphal, Bd. 80). (8°, VIII + 142 bldz., 52 afbeeldingen in de tekst; M. 10,50). Braunschweig, Fr. Vieweg & Sohn, 1929.

De rechtvaardiging van een hernieuwde behandeling van een reeds veelbesproken onderwerp-van-bespiegeling dient in het gezichtspunt te liggen, vanwaaruit de schrijver het vraagstuk beziet, en in de mogelikheid, dat dat gezichtspunt samenhangen zal doen ontdekken, die vóórdien in het duister gelegen waren. En daar alleen reeds uit de rijkvoorziene litteratuurlijst, die Dr. Weitzenböck aan zijn werkje heeft toegevoegd (het bevat een 150-tal titels) blijkt, dat het door hem behandelde onderwerp ongetwijfeld tot de „veelbesprokene" behoort, is de vraag naar het vervuld zijn van de hierboven genoemde voorwaarde o.i. in deze alleszins geoorloofd. En dan moet al dadelik erkend worden, dat de door de schrijver ingenomen doelstelling, door hem omschreven in de woorden: ....*„darzulegen, in welcher Weise die Idee eines vierdimensionalen Raumes die Tätigkeit des menschlichen Geistes bis jetzt zu beeinflussen imstande war"*, inderdaad aan de gestelde eis voldoet, omdat zij vrij wat meer omvattend is, dan uit het standpunt van één der velen, die tot dusver over „de vierde dimensie" geschreven hebben, voortvloeit. Dr. W. heeft zich immers nòch op het enkel-mathematiese, nòch op het zuiver-filosofiese, het mystieke, het historiese, het religieuse, het theosofiese, of zelfs, om volledig te zijn, op het amusementsstandpunt gesteld, en toch is zijn werk aan geen dier beschouwingswijzen geheel vreemd, en zouden wij zijn uiteenzettingen wellicht het best als mathematies-kultureel kunnen karakteriseren.

Een tweede vraag is natuurlik, of de schrijver erin geslaagd is, de door hem op de voorgrond gestelde en zo veelomvattende gedachte ten volle tot haar recht te doen komen. En om die vraag te beantwoorden met ietwat meer reden-van-wetenschap, dan in een „ik vind van wel" of „ik vind van niet" zou opgesloten liggen, is het nodig, een ogenblik bij het algemeen karakter stil te staan van de invloed, die wiskundige begrippen of grondbeginselen in de loop der tijden op de menselike geest hebben uitgeoefend, en op te merken, dat terwijl enerzijds de *uitkomsten,* waartoe de wiskundige denkvorm, op de ervaringswetenschappen toegepast, hebben geleid, de mensheid meer en meer macht over de hem omringende natuur verleenden en dus haar zelfgevoel en zelfvertrouwen deden toenemen, anderzijds de *vragen,* waartoe diezelfde denkvorm haar voerden, vaak een tegenovergestelde psychiese uitwerking hebben gehad. Van de dagen af, dat de oud-Indiese monniken en predikers, en later de Pythagoreërs, verband zochten tussen de regelmatigheden van de opeenvolging der getallen en de grilligheden van de opeenvolging der ervaringsfeiten, tot op de huidige beroering, die de relativiteitstheorie en haar kennistheoretiese konsekwenties in veler geest hebben teweeggebracht, zijn het telkens weer mathematiese (of quasi-mathematiese!) moeilikheden, die grote en kleine denkers hebben aangetrokken, ... en in

verwarring gebracht! De kwadratuur van de cirkel, Achilles en de schildpad, de „onbestaanbare" getallen, het parallellenaxioma, om maar enkele dier moeilikheden aan te stippen, hebben beurtelings de aandacht van velen getrokken en tot vaak eindeloze en onvruchtbare diskussies gevoerd. En dat euvel, als wij hier tenminste in het algemeen van een euvel mogen spreken, dat aan de pogingen der mensen, meer wiskundig te denken, eigen is, is wellicht aan geen beter voorbeeld te onderkennen en te toetsen dan aan dat, waaraan Dr. Weitzenböck indertijd zijn intreerede en tans deze „Einzeldarstellung" heeft gewijd: „de vierde dimensie". En als wij letten op de grote veelzijdigheid, waarmede het onderwerp hier behandeld is, en op de rijkdom aan stof, die in dit betrekkelik kleine boekje is verwerkt, dan kunnen wij niet anders dan onze grote waardering voor die behandeling uitspreken, en de verwachting koesteren dat zij ertoe zal bijdragen, de belangstelling voor het *kulturele* vraagstuk, dat met de mathematisering (of rationalisering, om een modewoord te gebruiken) van het menselik denken ten nauwste samenhangt, op te wekken of op hoger peil te brengen. Tegelijkertijd echter moet ons de opmerking van het hart, dat de draagwijdte zelve van dat vraagstuk door de schrijver nergens in het licht is gesteld, noch in algemene zin, noch ten aanzien van het gekozen onderwerp. Integendeel, het apodiktiese van sommige zijner uitspraken (wij denken hier b.v. aan het „Es giebt keine vierte Dimension" op bldz. 8 en aan het epitheton „Alles Schwindel", dat Dr. W. op al wat uit niet-mathematies oogpunt over de vierde dimensie is geschreven van toepassing acht), heeft ons vaak de indruk gegven, dat die draagwijdte door de schrijver ook niet ten volle is beseft. De vraag toch naar het „bestaan" ener vierde dimensie is opzichzelf reeds te zeer saamgeweven met allerlei misverstand en verwarring van denkbeelden, dan dat zij zonder meer, hetzij in bevestigende, hetzij in ontkennende zin zou kunnen worden beantwoord, en de signifiese ontleding ervan voert allereerst tot de prealabele kwestie: in hoeverre kan van een aanwijsbare ervaringsinhoud van de z.g. *drie*dimensionaliteit van de (fysiese) ruimte gesproken worden? Een kwestie, die naar het mij voorkomt, door de hierboven genoemde „beroering" in de natuur-wetenschappelike en filosofiese kringen onzer dagen in biezondere mate aktueel is geworden. En juist ten aanzien van deze signifiese begripsontleding zijn in de beschouwingen van Dr. W. slechts zeer enkele aanduidingen te vinden.

Maar genoeg. Het betere is reeds te vaak de vijand van het goede gebleken, dan dat wij er ons over zouden mogen beklagen, dat de schrijver zijn onderwerp niet nòg breder heeft opgevat: de leesbaarheid van het geheel zou daaronder misschien hebben geleden, en dat zou toch te betreuren zijn geweest. Want niet alleen voor de nieuwsgierige of belangstellende leek, die zich, half zijns ondanks, tot vraagstukken als het onderhavige voelt aangetrokken, zal de lektuur van dit handige en (op enkele wat àl te geleerde formules na), „gemeinverständliche" boekje vruchtdragend en verhelderend kunnen zijn, ook voor de man van wetenschap bevat het, ondanks hetgeen dan misschien te wensen mag overblijven, menige tot beter begrip of dieper inzicht voerende opmerking. G. Mannoury.

H. Wieleitner, Mathematische Quellenbücher. Mathematisch-Naturwissenschaftlich-Technische Bücherei; herausgegeben von E. Wasserloos und G. Wolff. Verlag Otto Salle. Berlin 1927. Bnd. 3; 11; 19; 24.

De verschijning van het vierde deeltje van de hierboven aangekondigde *Mathematische Quellenbücher* van de hand van den bekenden Duitschen historicus der wiskunde H. Wieleitner, geeft mij aanleiding, de aandacht van de lezers van dit tijdschrift op deze zeer belangrijke en waardevolle publicatie te vestigen. Zooals de titel aanduidt, bestaat het doel van de reeks hierin, dat door een bloemlezing van merkwaardige fragmenten uit historische werken de denkbeelden van de ontwikkeling der wiskunde zullen worden verlevendigd. Deze taak, hoewel in beginsel licht te stellen, brengt in hare uitvoering groote moeilijkheden met zich mee; men moet beschikken over een zeer uitgebreide kennis van de litteratuur, om een juiste keuze uit de tallooze, voor publicatie vatbare, stukken te kunnen doen en men moet in staat zijn, de voor den modernen lezer vaak zoo moeilijk te begrijpen redeneeringen uit lang vervloden tijdperken door korte ophelderingen te verduidelijken. Aan deze beide eischen voldoet echter de veelzijdige uitgever van de reeks in hooge mate en ik kan dan ook ieder, wiens belangstelling voor de geschiedenis der wiskunde zoover gaat, dat hij niet enkel wil weten, wat men in een bepaalde periode in staat was, te doen, maar vooral ook wil inzien, hoe men redeneerde, met den meesten nadruk aanraden, zich de sierlijk uitgevoerde en voor geringen prijs verkrijgbare deeltjes aan te schaffen.

Tot dusver zijn de volgende onderwerpen behandeld:

Rechnen und Algebra	(R.M. 2)
Geometrie und Trigonometrie	(R.M. 2)
Analytische und Synthetische Geometrie	(R.M. 2.50)
Infinitesimalrechnung	(R.M. 4.50)

Om een denkbeeld te geven van den inhoud schets ik in het kort, hoe de schrijver te werk is gegaan bij de samenstelling van het vierde deeltje.

Hij behandelt hierin eerst door weergave van fragmenten uit Euclides en Archimedes het postulaat van Eudoxos en de daarop gebaseerde z.g. exhaustiemethode. Hierna volgt de bepaling van het volume van den bol, eerst volgens den *Ephodos* van Archimedes, daarna volgens Lucas Valerius (1604). In vrijeren vorm ontmoet men daarna de methode van Archimedes bij Kepler (het lichaam malum), bij Cavalieri en bij Torricelli. Fermat leert dan alle hoogere hyperbolen (d.w.z. krommen van den vorm $x^n y^m = c$) quadreeren. Uit de geschiedenis van de Differentiaalrekening wordt dan de methode van de maxima en minima van Fermat behandeld en het optreden van den z.g. karakteristieken driehoek bij Pascal, waarna uit Barrow's *Lectiones Geometricae* de meetkundige behandeling van differentiatie en integratie als inverse operaties volgt. De eigenlijke differentiaal-„rekening" wordt dan ingevoerd met behulp van fragmenten uit Leibniz en Newton; men ziet haar toepassen door Bernoulli (Joh. I); terwijl als slot een passage uit Euler getuigenis aflegt van de veldwinnende onstrengheid van de achttiende-eeuwsche wiskunde.

Voor hen, die bij het geven van middelbaar onderwijs de behoefte voelen, de wordingsgeschiedenis van de onderwerpen, die zij behandelen, beter te leeren kennen, zou ik nog in het bijzonder de aandacht willen vestigen op het eerste deeltje, waarin interessante stukken voorkomen uit de geschiedenis van de vierkantsvergelijking en op het tweede, dat ook grootendeels onderwerpen bevat, die met de stof van H.B.S. of Gymnasium samenhangen.

Alle fragmenten zijn in een zeer nauwkeurige vertaling (van den schrijver zelf) weergegeven, voorzien van duidelijke toelichtingen en van uitgebreide litteratuuropgaven, terwijl elk deeltje besloten wordt met een naamregister met biographische aanteekeningen.

E. J. Dijksterhuis.

Gino Loria, Storia delle Mathematiche. Volume I. Antichità. Medio Evo. Rinascimento. S(ocietà) T(ipografico) — E(ditrice) N(azionale). Torino. 1929.

Het schrijven van een geschiedenis der wiskunde, die volledigheid, betrouwbaarheid en leesbaarheid zou kunnen vereenigen, is reeds sinds lang een taak, die menschelijke kracht te boven gaat. Er blijven dus voor wie mathematisch-historische kennis wil verspreiden, twee middelen over: de monographie, waarin een bepaald onderwerp geheel wordt uitgeput, en het algemeen orienteerend overzicht, waarvan men geen encyclopaedische volledigheid verwacht, maar waarin de groote lijnen der historische ontwikkeling duidelijk worden getrokken.

De schrijver van het hierboven aangekondigde werk, vrucht van een veertigjarige beoefening van de wetenschapsgeschiedenis, heeft den tweeden weg gekozen en het resultaat van zijn arbeid is van dien aard, dat de kennisname ervan aan ieder, die zich op een aangename wijze over de ontwikkeling der wiskunde wil laten inlichten, met warmte kan worden aangeraden. Loria paart namelijk aan een veelomvattende en bezonken kennis van zijn onderwerp een voortreffelijken bezielden stijl en ik zou geen tweede voorbeeld kunnen noemen van een historisch werk, dat zoo voortdurend de aandacht weet te boeien en dat op zoo heldere wijze een algemeenen blik op het gecompliceerde materiaal verschaft. Er is dan ook alle reden, met gespannen verwachting de verschijning van het tweede en het derde deel, die het werk zullen completeeren, tegemoet te zien.

In het reeds verschenen eerste deel worden eerst de Assyrisch-Babylonische en de Aegyptische wiskunden besproken, waarna zes hoofdstukken aan de Grieksche en een aan de Romeinsche wiskunde worden gewijd. De schrijver vervolgt dan eerst den hiermee ingeslagen weg door over de Europeesche (voornamelijk Byzantijnsche) wiskunde in de „secoli tenebrosi" te spreken, om daarna terug te keeren naar China, Indië en Arabië. Met Fibonacci, zeer uitvoerig en met verklaarbare nationale ingenomenheid behandeld, begint dan de Renaissance in Italië, die daarna aan de overzijde van de Alpen wordt vervolgd. Het slot wordt gevormd door een behandeling van de eerste beoefenaren van de algebra in Europa.

Hoewel het werk overal even prettig te lezen is, staan niet alle hoofdstukken op even hoog historisch peil. Naast de voortreffelijke

schets van de Arabische wiskunde, die op zeer uitgebreide studie van de beschikbare litteratuur berust, valt de behandeling van de Grieksche wiskunde, vooral van de vroegere stadia daarvan, tegen. De schrijver heeft hierbij namelijk in het geheel geen gebruik gemaakt van de nieuwere publicaties over de ontwikkeling der Euclidische wiskunde (Junge, Vogt, Eva Sachs, Frank, Hasse, Scholz), waardoor toch b.v. de denkbeelden over de Pythagoraeërs en over Zenoon sterk gewijzigd zijn. Natuurlijk bestaat de mogelijkheid, dat hij de resultaten van deze beschouwingswijze niet aanvaardt, maar men had dan toch een kritische bespreking mogen verwachten. Ook het eerste hoofdstuk zou vermoedelijk wel eenige wijziging hebben ondergaan, indien de schrijver meer rekening had gehouden met de publicaties van Neugebauer over de Aegyptische wiskunde. De wijze, waarop hij nu de splitsing van een breuk $\frac{2}{2n+1}$ in stambreuken behandelt, kan niet bijdragen tot verheldering van het inzicht, hoe de Egyptenaren zelf daarbij hebben geredeneerd. En hoofddoel van alle historisch werk blijft toch altijd de verplaatsing in den oorspronkelijken gedachtengang.

Deze enkele bezwaren kunnen echter niet beletten, volmondig te erkennen, dat de schrijver een voortreffelijk werk heeft geleverd. De meloria potentes, die hij uitnoodigt, hem te verbeteren, zullen nog wel eenigen tijd op zich laten wachten.

E. J. Dijksterhuis.

Dr. F. Schuh. Lessen over de Hoogere Algebra. Eerste deel. Tweede Druk. Groningen. Noordhoff. 1929.

Dat van dit omvangrijke werk over de Hoogere Algebra reeds een tweede druk noodig bleek (en dat ondanks de concurrentie, die de beknopte uitgave de volledige aandoet) is een overtuigend bewijs, zoowel van den ernst, waarmee in ons land de studie der wiskunde wordt beoefend als van de waarde, die de zeer betrouwbare, volledige en voortreffelijk geschreven werken van Prof. Schuh voor die beoefening bezitten.

Na wat ik reeds vroeger in dit tijdschrift over hetzelfde werk schreef, zal het niet noodig zijn, thans opnieuw in détails te treden. Ik vermeld dus alleen, dat er geen nieuwe onderwerpen zijn toegevoegd, maar dat de geheele tekst zorgvuldig is herzien en hier en daar aangevuld. Ook is het eerste deel nu voorzien van een afzonderlijk register.

E. J. Dijksterhuis.

Axiomatische behandeling der meetbare en onmeetbare verhoudingen van grootheden, een toepassing van de theorie van het onmeetbare getal op meetkundige en natuurkundige grootheden door Dr. Fred. Schuh. P. Noordhoff, Groningen, 1929. 123 blz., *f* 3.25.

De schrijver begint met te herinneren aan de theorie van het positieve reëele getal, in 't bijzonder die van Dedekind, die hij bekend onderstelt, waarbij nog eens vermeld wordt, dat die theorie wordt afgesloten met het bewijs van de stelling van de bovenste grens.

Dan worden in de volgende hoofdstukken besproken eenige alge-

meene eigenschappen van grootheden, die in de meetkunde en natuurkunde (mechanica) voorkomen. Daartoe worden in hoofdstuk I axioma's voor die grootheden opgesteld, die dienen om tot een theorie der verhoudingen van onderling meetbare grootheden te geraken. Uit de axioma's worden dan verschillende stellingen afgeleid. In hoofdstuk II wordt dan de theorie der meetbare verhoudingen ontwikkeld en in hoofdstuk III 't axioma van Archimedes en de theorie der onmeetbare verhoudingen. Hoofdstuk IV bevat dan de beschouwingen over de noodzakelijke eischen, waaraan het stelsel van axioma's moet voldoen (niet-strijdigheid, onderlinge onafhankelijkheid, continuiteit, volledigheid). Verder komen dan in hoofdstuk V de speciale beschouwingen over natuur- en meetkundige toepassingen. Hierbij doet zich de kwestie voor, of de ingevoerde axioma's recht van bestaan hebben. In 't bijzonder komen bij de natuurkundige grootheden daarvoor massa's in aanmerking. Wat de meetkunde betreft wordt 't standpunt ingenomen, dat de axioma's van Hilbert zijn ingevoerd. In de hoofdstukken VI en VII wordt de — de schrijver zegt „alleen uit historisch oogpunt belangrijke" — theorie van Euclides behandeld. De schrijver zet hierin uiteen, dat, wel is waar, voortbouwend op de definitie van Euclides (over gelijkheid van verhoudingen van grootheden) een theorie van het onmeetbare getal kan worden verkregen, maar dat Euclides zijn definitie niet tot een theorie van het onmeetbare getal heeft uitgewerkt, zoodat men niet kan zeggen, „dat Euclides het onmeetbare getal heeft gekend". Hierbij wordt dan gezegd, dat deze theorie ver achter staat bij de zuiver arithmetische theorieën, als van Cantor, Dedekind, Weierstrass en Baudet. De schrijver blijkt zich hier te stellen op 't meer Duitsche dan Fransche standpunt, waarvan het laatste meer waardeering voor de antieke vondsten impliceert dan het eerste.

In de laatste bladzijden vindt men Aanhangsels, waarin door den schrijver eigen ideeën worden ontwikkeld over een zuiver arithmetische theorie van het positieve onmeetbare getal. Het kenmerkende hiervan is het meer op den voorgrond brengen van de stelling van de bovenste grens.

Men behoeft natuurlijk bij iemand als prof. Schuh niet te twijfelen aan het sluitende van de mathematische ontwikkelingen.

Verder moet men het boek weer, als enkele andere van zijn hand, prijzen als een prikkel voor docenten om verschillende zaken, die toch bij het onderwijs dagelijks voorkomen, voor zich zelf eens onder de loupe te nemen. Maar tegelijkertijd komen dan toch bij den eenigszins anders aangelegden lezer dan den schrijver gedachten op, die ik al eens meer te berde heb gebracht en die nu bij deze gelegenheid aldus kunnen worden samengevat: Draait men bij dit soort van zaken niet eenigszins in een kringetje rond? Moet men niet in de „zoogenaamde" abstractie tot getal *louter* zien het „correspondentiebeginsel"?

D. P. A. V.

HET GRENSNUT IN WISKUNDIGE BEHANDELING

DOOR

Dr. E. L. ELTE.

---

1. Bij handelingen, die het onderwerp der economische wetenschap vormen, zoekt men steeds iets nuttigs te verwerven en wil in ruil daarvoor iets anders opofferen. Dat nuttige behoeft niet juist te bestaan in het bezit van iets; het kan ook het gebruik van iets beteekenen of de verzekering van een dienst door anderen. Ook behoeft men bij het woord „nut" niet te denken aan dat wat in het dagelijksch leven nuttig heet, waar het gewoonlijk aan iets degelijks doet denken. In de economie heet nuttig alles wat door een mensch begeerd kan worden, al is het ook schadelijk. Wat is dus nuttiger, een abonnement op „Euclides" of een op „Het Amusante Weekblad"? Het antwoord hangt natuurlijk geheel af van de persoon, die die vraag voor zich moet beantwoorden. Door dat antwoord zijn we aangeland bij een theorie, die men de subjectieve waardeleer noemt. Het heeft toch al lang de aandacht getrokken, dat de verschillende dingen zulke sterk uiteenloopende prijzen bedingen; men zegt, zulke verschillende „ruilwaarden" hebben. Aan het objectieve nut dat men hun misschien kan toeschrijven kan dat niet liggen. Diamant is duurder dan water. Nu zijn er theorieën, die dat verschijnsel trachten te verklaren en de subjectieve waardeleer legt den nadruk op de omstandigheid, dat de waardeering (gewoonlijk in geld uitgedrukt) van een ding afhangt van het subject, dat het waardeeren moet. Een der bekendste vertegenwoordigers dezer theorie is Von Böhm-Bawerk, al moet de oorsprong van de theorie al bij vroegere schrijvers gezocht worden.

2. Hangt dus de waardeering van een goed af van den waardeerder, ze hangt ook nog af van de hoeveelheid, die de waardeerder van dat goed al bezit. Dat dat in niet geringe mate het geval is, kan men zich duidelijk maken aan het volgende klassieke voorbeeld.

BESTELKAART VOOR BOEKWERKEN.

$1^1/_2$ cts.
postzegel

N.V. Erven P. NOORDHOFF'S

Uitgeverszaak.

Postbus 39.

Giro Ned. Bk. No. 1858
Post-Giro No. 6593

GRONINGEN.

Ondergeteekende, abonné op { „Christiaan Huygens" / „N. T. voor Wiskunde" *) / „Euclides" (het vroegere Bijvoegsel) }

verzoekt toezending van een exemplaar:

HISTORISCHE BIBLIOTHEEK DEEL III

DIJKSTERHUIS, DE ELEMENTEN VAN EUCLIDES II

Geb. à f 5.00, gewone prijs is f 5.75

door bemiddeling van den boekhandel
direct per post,

....

Naam: Woonplaats:

....

*) Ieder abonné heeft slechts recht op 1 ex.

PROSPECTUS.

DE ELEMENTEN VAN EUCLIDES

DEEL II.

DE BOEKEN II–XIII DER ELEMENTEN.

DOOR

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS.

LEERAAR AAN DE R.H.B.S. WILLEM II
TE TILBURG.



P. NOORDHOFF N.V. – 1930 – GRONINGEN

**Prijs van het complete boek, groot 300 pag.
geb. f 5,75, bij inteekening f 5,00.**

INHOUD.

AFDEELING II.

(Voortzetting).

De Elementen van Euclides.

—

Hoofdstuk IX. De drie arithmetische boeken. Boek VII—IX

pag. 115—167

—

Hoofdstuk X. Boek X. Theorie der irrationaliteiten

13. De proposities 35 en 36.

Het negende Boek wordt besloten met twee belangrijke proposities, die we weer in extenso weergeven.

Propositie XXXV.

Ἐὰν ὦσιν ὁσοιδηποτοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἀνάλογον, ἀφαιρεθῶσι δὲ ἀπό τε τοῦ δευτέρου καὶ τοῦ ἐσχάτου ἴσοι τῷ πρώτῳ ἔσται ὡς ἡ τοῦ δευτέρου ὑπεροχὴ πρὸς τὸν πρῶτον, οὕτως ἡ τοῦ ἐσχάτου ὑπεροχὴ πρὸς τοὺς πρὸ ἑαυτοῦ πάντας.

Indien er willekeurig veel getallen zijn, opvolgend evenredig, en er worden van het tweede en het laatste [getallen] afgenomen, gelijk aan het eerste, dan zal, zooals het overschot van het tweede tot het eerste, zoo het overschot van het laatste tot alle aan hem voorafgaande staan.

Gegeven zijn (fig. 65) de gedurig evenredige getallen A, $B\Gamma$, Δ. EZ. Men vermindert $B\Gamma$ met BH, EZ met $Z\Theta$, elk gelijk aan A. Te bewijzen is

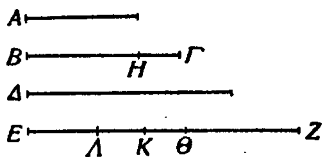


Fig. 65.

$$H\Gamma : A = E\Theta : (A + B\Gamma + \Delta).$$

Maak $ZK = B\Gamma$ en $Z\Lambda = \Delta$, dan is $\Theta K = H\Gamma$.

Gegeven is:

$$EZ : \Delta = \Delta : B\Gamma = B\Gamma : A,$$

dus ook $\quad EZ : Z\Lambda = Z\Lambda : ZK = ZK : Z\Theta$

dus (VII, 11, 13) $\quad E\Lambda : Z\Lambda = \Lambda K : ZK = K\Theta : Z\Theta$

en (VII, 12) $\quad K\Theta : Z\Theta = (E\Lambda + \Lambda K + K\Theta) : (Z\Lambda + ZK + Z\Theta)$

of $\quad \Gamma H : A = E\Theta : (\Delta + B\Gamma + A)$

De bewezen stelling is in moderne symboliek zoo te formuleeren, dat voor een meetkundige reeks

$a, ar, ar^2, \ldots, ar^n$, ($a$ positief geheel, r positief rationaal) geldt:

$$\frac{ar - a}{a} = \frac{ar^n - a}{a + ar + \ldots ar^{n-1}}$$

waaruit de bekende formule

$$S_n = a\frac{r^n - 1}{r - 1}$$

volgt.

Propositie XXVI.

Ἐὰν ἀπὸ μονάδος ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ ἑξῆς ἐκτεθῶσιν ἐν τῇ διπλασίονι ἀναλογίᾳ, ἕως οὗ ὁ σύμπας συντεθεὶς πρῶτος γένηται, καὶ ὁ σύμπας ἐπὶ τὸν ἔσχατον πολλαπλασιασθεὶς ποιῇ τινα, ὁ γενόμενος τέλειος ἔσται.

Indien vanaf de eenheid willekeurig veel getallen opvolgend worden uitgezet in een dubbelevenredigheid, totdat het samengestelde totaal priem wordt en indien het totaal, vermenigvuldigd met het laatste getal, een [getal] oplevert, dan zal het ontstane [getal] volkomen zijn.

Gegeven is (fig. 66) de rij: eenheid, A (tweemaal de eenheid), B, Γ, Δ, . . . gedurig evenredig met reden 2. Hun som zij E. Vorm $E . \Delta = ZH$. Te bewijzen is, dat ZH volkomen is, d.w.z. gelijk aan de som van al zijn (echte) deelers. (VII, Def. XXII.)

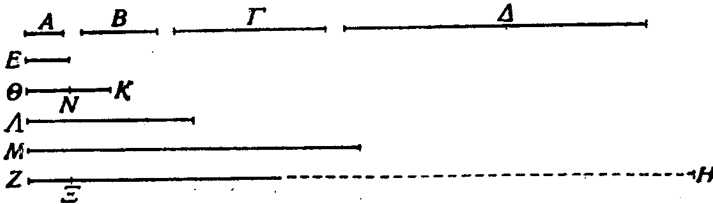


Fig. 66.

Vorm, uitgaande van E, een gedurig evenredige getallenrij met reden 2: E, ΘK, Λ, M. Dan is *ex aequali*:

$$A : \Delta = E : M, \text{ dus } A . M = E . \Delta = ZH, \text{ dus } ZH = 2M.$$

De rij E, ΘK, Λ, M, ZH voldoet dus aan de voorwaarden van Prop. 35. Is $Z\Xi = \Theta N = E$, dan is

$$NK : E = \Xi H : (M + \Lambda + \Theta K + E),$$

maar, daar $NK = E$,

$$\Xi H = M + \Lambda + \Theta K + E,$$

waarin

$$E = \Delta + \Gamma + B + A + 1.$$

volgt. Theaitetos zegt echter niet, dat zijden van vierkanten, welker oppervlakken door rechthoekige getallen worden uitgedrukt, toch wel symmetrisch kunnen zijn, namelijk als die rechthoekige getallen zich als vierkante getallen verhouden (m.a.w. als ze gelijkvormig zijn) en juist in dit inzicht, dat in Euclides X, 9 wel aanwezig is, zou volgens den in het Arabisch bewaard gebleven commentaar op Euclides X [168]) de vooruitgang hebben bestaan, die Euclides ten opzichte van Theaitetos bereikt had.

3. De proposities 11—21.

We vermelden kort de proposities 11—20 [169]).

In de proposities 11—13 zijn A, B, Γ, Δ grootheden.

Prop. 11. Is $\boldsymbol{A}(A, B) = \boldsymbol{A}(\Gamma, \Delta)$ en $A\left\{{}^{\sigma}_{\alpha}\right. B$, dan is $\Gamma\left\{{}^{\sigma}_{\alpha}\right. \Delta$.

Prop. 12. Is $A\,\sigma\,\Gamma$ en $B\,\sigma\,\Gamma$, dan is $A\,\sigma\,B$.

Prop. 13. Is $A\,\sigma\,B$ en $A\,\alpha\,\Gamma$, dan is $B\,\alpha\,\Gamma$.

Prop. 14. A, B, Γ, Δ zijn rechten. $\boldsymbol{A}(A, B) = \boldsymbol{A}(\Gamma, \Delta)$. Zij

$$\mathrm{T}(A) - \mathrm{T}(B) = \mathrm{T}(E).$$
$$\mathrm{T}(\Gamma) - \mathrm{T}(\Delta) = \mathrm{T}(Z).$$

Is nu $E\left\{{}^{\sigma}_{\alpha}\right. A$, dan is $Z\left\{{}^{\sigma}_{\alpha}\right. \Gamma$.

In de proposities 15 en 16 zijn A, B, Γ, Δ grootheden.

Prop. 15. Is $A\,\sigma\,B$, dan is $(A + B)\,\sigma\,A$ en $\sigma\,B$.
Is $(A + B)\,\sigma\,A$ of $\sigma\,B$, dan is $A\,\sigma\,B$.

Prop. 16. Is $A\,\alpha\,B$, dan is $(A + B)\,\alpha\,A$ en $\alpha\,B$.
Is $(A + B)\,\alpha A$, dan is $A\,\alpha\,B$.

---

168) Deze commentaar, die reeds vermeld werd in noot 48 van Deel I en waarvan we verder de daar geciteerde Duitsche vertaling van H. Suter zullen gebruiken, is in 969 door Abû-'Othmân al-Dimashkî in het Arabisch vertaald. Over het verschil tusschen Theaitetos en Euclides zie men in de vertaling van Suter pag. 21—22 en 74—75. In denzelfden zin uit zich de Scholiast bij Euclides, *Opera* V, 450; No. 62: *Τὸ θεώρημα τοῦτο Θεαιτήτειόν ἐστιν εὕρημα, καὶ μέμνηται αὐτοῦ ὁ Πλάτων ἐν Θεαιτήτῳ, ἀλλ' ἐκεῖ μὲν μερικώτερον ἔγκειται, ἐνταῦθα δὲ καθόλου.*

169) Prop. 10 waarin het probleem wordt opgelost, twee rechten te vinden, die met een gegeven rechte resp. potentieel symmetrisch en potentieel asymmetrisch zijn, wordt door Heath (*Euclid* III, 32) op goede gronden als een interpolatie beschouwd.

Prop. 17. $B\Gamma$ en A (fig. 69) zijn twee rechten ($B\Gamma > A$). Het oppervlak $\frac{1}{4}$ T (A) wordt elliptisch aangepast aan $B\Gamma$ met quadratisch defect (II, 5). Het deelpunt is Δ, zoodat $B\Delta > \Delta\Gamma$ en

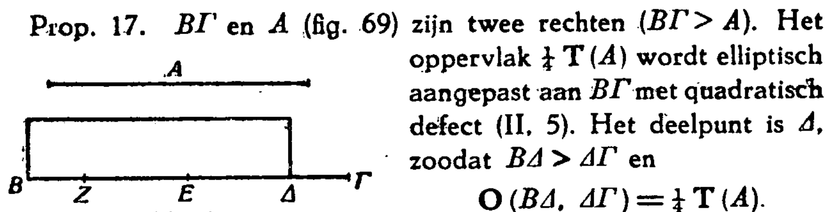


Fig. 69.

$$\text{O}\,(B\Delta,\ \Delta\Gamma) = \tfrac{1}{4}\,\text{T}\,(A).$$

Zij $\text{T}\,(B\Gamma) - \text{T}\,(A) = \text{T}\,(\Delta Z)$.

Propositie: Is $B\Delta\ \sigma\ \Delta\Gamma$, dan is $B\Gamma\ \sigma\ \Delta Z$ en omgekeerd.

Bewijs: Is E het midden van $B\Gamma$, dan is volgens II, 5:

$$\text{O}\,(B\Delta,\ \Delta\Gamma) + \text{T}\,(\Delta E) = \text{T}\,(E\Gamma),$$

dus door vermenigvuldiging met 4:

$$\text{T}\,(A) + \text{T}\,(2\,\Delta E) = \text{T}(B\Gamma).$$

Dus is $\qquad \Delta Z = 2\,\Delta E.$

Het gestelde volgt nu uit X, 6, 12, 15 resp. 15, 12, 6.

Het doel der propositie is blijkbaar het opstellen van een voorwaarde, noodig en voldoende voor de symmetrie van de deelen ($B\Delta$ en $\Delta\Gamma$), waarin een lijnstuk $B\Gamma$ door een elliptische aanpassing wordt verdeeld. Algebraïsch geformuleerd, beduidt die symmetrie, dat de wortels van de vergelijking

$$x^2 - ax + b^2 = 0 \quad (\text{waarin } a = B\Gamma,\ b = \tfrac{1}{2}A)$$

rationaal in elkaar en dus in a zijn uit te drukken. De voorwaarde is, dat $\sqrt{a^2 - 4b^2}$ rationaal in a is uit te drukken, wat aequivalent is met de voorwaarde $Z\Delta\ \sigma\ B\Gamma$.

Prop. 18. Deze bestaat uit twee deelen, die opv. Logische Omkeering zijn van het tweede en het eerste deel van Prop. 17.

Prop. 19 en 20. Deze handelen over rationale en irrationale rechthoeken. In Prop. 19 wordt afgeleid, dat voor rationaliteit van een rechthoek voldoende is, dat de zijden rationaal en symmetrisch zijn, in Prop. 20, dat voor rationaliteit van een rechthoek met een rationale zijde noodig is, dat de andere zijde rationaal en symmetrisch met de eerste is. In X, 25, 27 zal blijken, dat het niet noodig is, dat beide zijden rationaal zijn.

Van groot belang is de thans volgende Prop. 21, waarin een der drie fundamenteele irrationaliteiten wordt ingevoerd.

HISTORISCHE BIBLIOTHEEK
VOOR DE EXACTE WETENSCHAPPEN

ONDER LEIDING VAN

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS EN Dr. H. J. E. BETH

Deel III. DE ELEMENTEN VAN EUCLIDES.

DEEL II. De boeken II—XIII der Elementen

door Dr. E. J. DIJKSTERHUIS

Prijs gebonden f 5.75, bij inteekening . f 5.—.

De Elementen van Euclides.

V I. De oppervlakterekening. — VI III. De Cirkel. — VII IV. Cirkel en Driehoek. Regelmatige veelhoeken. — VIII V. De redentheorie. VIII VI. De meetkundige toepassing der redentheorie. — IX. De drie arithmetische boeken. VII—IX. — X X. Theorie der Irrationaliteiten. — XI XI. Stereometrie. — XII XII. Inhoudsbepalingen. — XIII XIII. Regelmatige veelvlakken. Appendix I. Komen in de Grieksche wiskunde irrationale getallen voor? Appendix II. Uit de geschiedenis van de termen reden (λόγος) en evenredigheid (ἀναλογια). Naamregister.

VROEGER VERSCHEEN:

Dr. E. J. DIJKSTERHUIS

DE ELEMENTEN VAN EUCLIDES

Deel I. 236 blz., gebonden . . . . f 4.50

De ontwikkeling der Grieksche Wiskunde voor Euclides.

I. Inleiding. — II. Pythagoras en de Pythagareeën. — III. Hippokrates van Chios. — IV. Het probleem der Continuïteit. — V. De crisis in de Grieksche wiskunde. — VI. De Phytagoreeërs volgens de hyp. van Trank. — VII. Plato. — VIII. Van Plato tot Euclides. IX. Euclides.

De elementen van Euclides.

I. Grondslagen. — II. De proposities 1—26. — III. De proposities 27—32. — De parallelen-theorie. — IV. De proposities 33—43. — De aequivalentietheorie. — V. De proposities 43—48. — Aanpassing van oppervlakten en theorema van Pythagoras.

Dr. H. J. E. BETH

INLEIDING TOT DE NIET-EUCLIDISCHE MEETKUNDE OP HISTORISCHEN GRONDSLAG

212 blz., gebonden . . . . f 4.50

I. *Voorgeschiedenis der niet-Euclidische meetkunde.*
Inleiding. — Parallelisme en aequidistantie. — Parallelisme en gelijkvormigheid. — Girolamo Saccheri. — Lambert. — Legendre.
II. *De grondleggers der niet-Euclidische meetkunde.*
Lobatschefsky. — Bolyai. — Gauss.
III. *De analytische ruimteleer.*
Inleiding. — Riemann. — Beltrami. — Helmholtz. — De ruimteleer van Kant en de mogelijkheid der N. E. meetkunde.
IV. *De projectieve en groepentheoretische richting.*
Inleiding. — Cayley. — Klein. Sophus Lie.
V. *De moderne axiomatica.*
Inleiding. — De axioma-groepen van Hilbert. — Interpretaties van axiomasystemen.
VI. *Hyperbolische meetkunde.*
VII. *Elliptische meetkunde.*

UITGAVE VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN.

Men vrage zich af wat men voor een emmer water zou geven, als men geen water heeft, of als men al genoeg water heeft om te drinken, koken, wasschen maar toch nog wat kon gebruiken voor een bad. In het tweede geval zal menigeen wel iets in ruil voor een emmer water willen geven, in het eerste geval wil ieder wel alles daarvoor opofferen.

Von Böhm-Bawerk geeft het volgende voorbeeld. Iemand buiten het verkeer met andere menschen wonend, heeft zijn graanoogst binnengehaald, die in 5 zakken verdeeld en daaraan de volgende bestemmingen gegeven:

1. voedsel voor zich, noodig om tot de volgende oogst niet te verhongeren.
2. voedsel voor zich, om meer te kunnen eten dan het allernoodzakelijke.
3. voedsel voor gevogelte om zijn diëet met vleeschvoeding te kunnen afwisselen.
4. bereiding van brandewijn.
5. voedsel voor papegaaien, die hij voor zijn pleizier houdt.

De afname van het nut der zakken is duidelijk. Al is bij andere artikelen die afname minder scherp geteekend, dat men bij ieder ding een afnemend nut kan waarnemen is wel zeker. Dit verschijnsel heet *de wet van Gossen van het afnemende nut.* [1]) Het nut van de minst nuttige eenheid, in ons voorbeeld de 5e zak, heet het *grensnut* en speelt in de subjectieve waardeleer een gewichtige rol. Men denke zich bijvoorbeeld, dat onze man met een anderen kolonist in aanraking komt, aan wien hij wel één zak graan zou kunnen kwijtraken in ruil voor iets anders. Dan zal hij overwegen niet alleen, welk nut hem dat, wat hij in ruil krijgt, geeft, maar ook het nut, dat hij ontbeert bij de opoffering van één zak graan. Dan denkt hij natuurlijk niet aan het opgeven van zijn eigen voedsel, maar aan het opgeven van zijn papegaaienliefhebberij, ondersteld dat die hem het minst nuttig lijkt. Dàt nut nu geeft hem den grondslag voor de waardeering van één zak. Het grensnut bepaalt dus de waardeering van iedere eenheid.

---

[1]) H. H. Gossen, „Entwicklung der Gesetze des menschlichen Verkehrs und der daraus fliessenden Regeln für menschliches Handeln", 1853. Het boek is volkomen onopgemerkt gebleven gedurende het leven van den schijver. Latere economen, die tot dezelfde uitkomsten kwamen als G. kenden zijn werk niet eens.

3. Nemen we nu aan, dat het subjectieve nut van een hoeveelheid van zeker goed een grootheid is. Dat dit zoo is, is zeker een betwistbaar punt. Wel kan een subject vaststellen, welk van twee dingen nuttiger is; ook wel wat hij „veel nuttiger" of „niet zoo heel veel nuttiger" noemt. Men kan zich toch iemand voorstellen die „Het Amusante Weekblad" iets nuttiger dan „De Lach", maar veel nuttiger dan „Euclides" vindt. Maar de vraag is of bijv. een uitdrukking als „één eenheid van A is driemaal zoo nuttig als één eenheid van B" werkelijk zin heeft.

Dat het nut [1]) een grootheid is, nemen we nu als onderstelling aan en kunnen het dus voorstellen als een functie L van de hoeveelheid x van het goed

$$L(x).$$

$L(x) = 0$, als $x = 0$ is; $L'(x)$ is positief en $L''(x)$ is, volgens de wet van het afnemende nut, negatief, alles voor positieve waarden van x.

Negatieve waarden van x hebben voor ons geen beteekenis.

Als grafische voorstelling op een rechthoekig assenstelsel krijgt men een kromme door den oorsprong met de concave zijde naar de x-as gekeerd. De L neemt bij toenemende x steeds toe.

4. Wat is nu het grensnut? Zooals dat begrip in § 2 is uiteengezet — dat is de manier, waarop de schrijvers, die geen wiskunde gebruiken, het invoeren — is het een differentiequotient, waarbij Δx de minst nuttige eenheid voorstelt. Daar die eenheid een volstrekt niet scherp bepaalde hoeveelheid is, is het aldus gedefinieerde grensnut onbepaald. We kunnen dus het grensnut wel niet anders definieeren dan door $L'(x)$, de afgeleide der L-functie. [2])

Het zal trouwens blijken, dat die afgeleide in onze verdere ontwikkelingen van zelf voor den dag komt en in de resultaten dezelfde plaats inneemt, als het grensnut bij de „literaire" economen.

5. We zullen nu een subject beschouwen, dat buiten het economisch verkeer met anderen staat en dus alles wat hij voor zijn instandhouding behoeft zelf moet produceeren. De opoffering, die

---

[1]) Voor „nut" vindt men ook wel „ophelimiteit" (Pareto).
[2]) Deze afgeleide heet ook wel „elementaire ophelimiteit". De Zwitersche schrijver Walras noemt het „rareté".

hij in ruil moet geven, bestaat in het verrichten van arbeid. Die opoffering zullen we *„onlust”* noemen en als functie $O(t)$ van den werktijd t voorstellen.

$O(t)$ groeit met t aan. De tweede afgeleide is hier positief daar iedere tijdseenheid een grootere onlusttoename geeft dan de voorgaande. Dit is een tegenstelling met de L-functie. De onlusttoename van de laatste tijdseenheid wordt wel *grensleed* genoemd, een analogon van grensnut. We definieeren het als $O'(t)$ en noemen het *onlustintensiteit.* [1])

Grafisch voorgesteld gaat dus de onlustkromme door den oorsprong en keert de convexe zijde naar de t-as.

Ook het nut van een goed zullen we een functie van den arbeidstijd stellen $L(t)$ en die de *lustfunctie* noemen. De eerste en tweede afgeleiden hebben dezelfde eigenschappen als die van $L(x)$. We kunnen onderstellen, dat x evenredig met t is en dat dus $L'(x)$ en $L'(t)$ op een constanten factor na gelijk zijn; $L'(t)$ noemen we *lustintensiteit.*

6. Stel nu, dat er n verschillende dingen geproduceerd worden, dan kunnen we vragen hoe, *bij gegeven totalen arbeidstijd t,* de tijd over de verschillende goederen het voordeeligst verdeeld wordt.

De arbeidstijden voor de verschillende goederen

$$t_1, t_2, \ldots t_n$$

noemende, hebben we

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n = t \qquad (1)$$

De totale lust of het totale nut is

$$L_1(t) + L_2(t_2) + \ldots + L_n(t_n)$$

Om die functie maximaal te krijgen moet

$$L_1'(t_1)\, dt_1 + L_2'(t_2)\, dt_2 + L'_n(t_n)\, dt_n = 0 \qquad (2)$$

daar L'' zeker negatief is.

Uit (1) volgt $dt_1 + \ldots + dt_n = 0$

waaruit volgt

$$L_1'(t_1) = L_2'(t_2) = L_n'(t_n) \qquad (3)$$

De productie is dus zoo voordeelig mogelijk als de *lustintensiteiten van alle geproduceerde goederen aan elkaar gelijk zijn.*

---

[1]) S. de Wolff. Het Economisch Getij. Amsterdam 1929, blz. 307.

Dit is bekend als de wet van Wieser. Het resultaat was ook vroeger door Gossen gevonden.

7. Het in de vorige § gevondene kan met een graphische voorstelling duidelijk gemaakt worden, wanneer het de productie van twee goederen betreft. De werktijd van het eerste goed wordt in fig. 1 van A af naar rechts afgepast en als ordinaat de lustintensiteit.

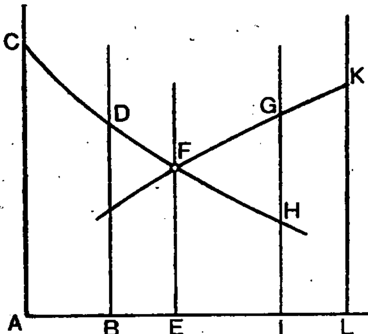


Fig. 1.

Zoo stelt BD de lustintensiteit aan het eind van den werktijd AB voor. De lust in dien werktijd verkregen is de oppervlakte van ACDB.

De gegeven totale werktijd zij nu AL.

Voor het tweede goed gaan we evenzoo te werk, beginnende bij L. GI is de lustintensiteit aan het einde van den arbeidstijd LI en de oppervlakte LKGI stelt de lust voor.

Uit de beschouwing van de figuur blijkt nu onmiddellijk, dat de door de beide krommen en de rechten CA, AL en LK begrensde oppervlakte het grootst is, als de totale werktijd AL in AE en EL verdeeld wordt en wel ACFKL.

Een andere verdeeling zou de oppervlakte verkleinen. Maar dan hebben de beide goederen dezelfde onlustintensiteit EF.

8. Het zooeven behandelde vraagstuk, dus het verkrijgen van een maximum resultaat met gegeven middelen wordt genoemd: handelen volgens het *economisch principe.* Met S. de Wolff [1]) zullen we dit *rationeele productie* noemen en den naam *economische productie* reserveeren voor die, waarbij het lustsaldo (d.i. het verschil van lust en onlust) maximaal is. Inderdaad, zooals de vraag in § 6 gesteld is, zijn er vele rationeele productieverdeelingen mogelijk. Het hangt er maar van af, hoe groot men t stelt. Nu is het er om te doen van al die verdeelingen de meest rationeele te vinden en die is het, die we de economische noemen.

Het saldo is

$$L_1(t_1) + \ldots + L_n(t_n) - O(t_1 + \ldots t_n)$$

---

[1]) S. de Wolff, t. a. p. bldz. 292.

De voorwaarden voor het maximaal zijn van dat saldo zijn dus:

$$L_1'(t_1) = L_2'(t_2) = \ldots = O'(t) \qquad (4)$$

Dit resultaat is bekend als de *tweede wet van Gossen. De lustintensiteiten van de geproduceerde goederen zijn aan elkaar gelijk en gelijk aan de onlustintensiteit aan het einde van den totalen arbeidstijd.*

Het merkwaardige van dit resultaat is, dat er uit blijkt, dat voor onzen producent sprake kan zijn van onderproductie en overproductie. Immers, als de lust- en onlustfuncties als gegeven aangenomen worden, zijn er evenveel vergelijkingen als onbekenden, zoodat zoowel bepaald is, hoe lang de geheele werktijd moet zijn, als ook, hoe die over de verschillende goederen verdeeld moet worden.

9. Onafhankelijk van Gossen heeft R. Liefmann [1]) de laatstgenoemde wet gevonden, die men de nivelleering van de grensoverschotten (Grenzerträge) noemt. Nu is Grenzertrag een grootheid, waarover Liefmann zich zelf eigenaardig twijfelend uit. Hij zegt, dat het het verschil of misschien wel de verhouding is van grensnut en grensleed. Volgens onze uitdrukkingswijze twijfelt hij dus tusschen $L'—O'$ en $L' : O'$. Uit (4) zien we, dat het er niet toe doet, want beide zijn voor alle goederen gelijk; de verschillen gelijk aan nul, de verhoudingen één.

$$L'_1 - O' = L'_2 - O' = \ldots = 0 \qquad (5)$$

$$L'_1 : O' : L'_2 : O' = \ldots = 1 \qquad (6)$$

Liefmann decideert dan toch nog voor „verhouding" en we zullen verder zien, dat hij daar goed aan gedaan heeft. Volgen we hem daarin, dan is zijn wet dus: *Bij economische productie zijn alle Grenzerträge gelijk aan de eenheid.*

10. We zullen nu een vraag bezien, waarin de vorige als bijzonder geval begrepen is. We nemen aan, dat ieder geproduceerd goed zijn eigen O-functie heeft en onderstellen daarbij, dat de *totale onlust onafhankelijk is van de volgorde, waarin geproduceerd wordt.* Dan bewijzen we, dat de totale O een functie is van een homogene lineaire functie der werktijden:

---

[1]) Liefmann, Grundsätze der Volkswirtschaftslehre I, bl. 405, vg.

$$O\left(\frac{t_1}{a_1}+\frac{t_2}{a_2}+\ldots+\frac{t_n}{a_n}\right)$$

of

$$O\left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{t_i}{a_i}\right).$$

Stel nl. dat de eerste a_1 tijdseenheden in de 1e productie gelijke onlust geven als de eerste a_2 tijdseenh. in de 2e productie. Als we de onlustfunctie der i^{de} productie door O_i voorstellen:

$$O_1(a_1) = O_2(a_2) \qquad (7)$$

Denk nu, dat men achtereenvolgens a_1 tijdseenheden in de 1e productie en daarna a_2 tijdseenheden in de 2e productie werkt. De O van de 1e productie $O_1(a_1)$ kunnen we door $O_2(a_2)$ vervangen. De totale onlust is dus $O_2(2a_2)$. Maar de omgekeerde volgorde nemende geeft eerst de productie van het 2e goed een onlust $O_2(a_2)$, die door $O_1(a_1)$ te vervangen is, dus totaal $O_1(2a_1)$. Daar het eindresultaat volgens de gemaakte onderstelling hetzelfde moet zijn is $O_1(2a_1) = O_2(2a_2)$. (8)

Op dergelijke wijze komen we tot $O_1(pa_1) = O_2(pa_2)$, (9) waarin p een geheel getal is.

Ook is $$O_1\left(\frac{a_1}{p}\right)=O_2\left(\frac{a_2}{p}\right), \qquad (10)$$

als p geheel is. Want stellen we

$$O_1\left(\frac{a_1}{p}\right)=O_2(b) \qquad (11)$$

dan is volgens (9) $O_1(a_1) = O_2(pb)$; dus, in verband met (7) : $b = \frac{a_2}{p}$, waardoor (10) uit (11) volgt.

Men mag dus zeggen, dat (9) voor alle geheele en gebroken (en uitteraard positieve)waarden van p geldt. De beteekenis van (9) is nu dat men uit $O_1(t_1) = O_2(t_2)$ direct kan besluiten tot

$$t_1 : t_2 = a_1 : a_2 \qquad (12)$$

Van twee werken, die gelijke onlusten geven zijn dus de verhoudingen der werktijden constant.

(12) is dus een soort omrekeningsformule waarmee men uren, aan de eene productie besteed, herleidt tot uren aan de andere besteed, bij constante onlust.

Wat is dus de totale onlust van x_1 tijdseenh. in de 1e productie

gevolgd door x_2 tijdseenh. in de 2e? Daarvoor kunnen we nu twee uitdrukkingen geven, naar gelang men met behulp van (12) alles tot de 1e of tot de 2e productie herleidt:

$$a)\quad O_1\left(t_1+\frac{a_1}{a_2}t_2\right)\quad \text{of}\quad O_1\left[a_1\left(\frac{t_1}{a_1}+\frac{t_2}{a_2}\right)\right]$$
$$b)\quad O_2\left(\frac{a_2}{a_1}t_1+t_2\right)\quad \text{of}\quad O_2\left[a_2\left(\frac{t_1}{a_1}+\frac{t_2}{a_2}\right)\right]. \qquad (13)$$

In beide uitdrukkingen treedt de lineaire functie $\frac{t_1}{a_1}+\frac{t_2}{a_2}$ op, zoodat we kunnen zeggen dat de onlust is een functie van die lineaire functie:

$$O\left(\frac{t_1}{a_1}+\frac{t_2}{a_2}\right)$$

waarmede de eigenschap voor 2 producties bewezen is. De uitbreiding op meerdere kan geen bezwaren geven, aangezien we de onlust, in twee producties ondervonden, kunnen beheerschen met de onlustfunctie van één van die twee (13). We kunnen dus zeggen:

$$\text{Totale onlust} = O\left(\sum_{i=1}^{i=n}\frac{t_i}{a_i}\right) \qquad (14)$$

wat we kortweg zullen aanduiden door $O\left(\sum\frac{t}{a}\right)$.

11. Wel is de onlustintensiteit aan het einde van den werktijd afhankelijk van de volgorde en wel van het goed, dat het laatste geproduceerd is. Stel, dat het laatste goed den index i heeft. In verband met (13) en (14) is nu identisch:

$$O_i\left(a_i\sum\frac{t}{a}\right)=O\left(\sum\frac{t}{a}\right).$$

Beide leden naar t_i differentieerende:

$$O_i'\left(a_1\sum\frac{t}{a}\right)=\frac{1}{a_i}O'\left(\sum\frac{t}{a}\right) \qquad (15)$$

De onlustintensiteit aan het einde van arbeidstijd, *indien de productie i de laatste is, is dus omgekeerd evenredig met a_i.*

Dit is dus ook de onlustintensiteit, indien de geheele onlust *zou teweeg gebracht zijn door de productie van i alleen.*

We zullen die kort de *onlustintensiteit van i noemen.*

12. Van het in § 10 behandelde geeft fig. 2 een voorstelling. Op

een rechthoekig assenstelsel zijn eenige O-functies geteekend: O_1, O_2 en O_3. LA $= a_1$; LB $= a_2$.

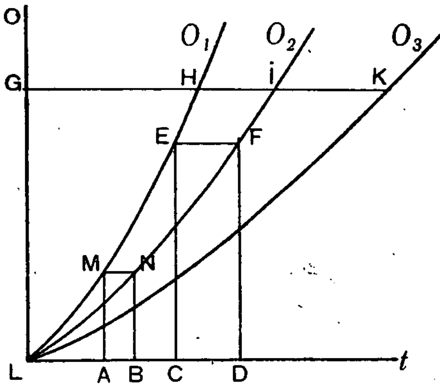


Fig. 2.

De gelijke onlusten $O_1(a_1)$ en $O_2(a_2)$ zijn voorgesteld door AM en BN.

Als BD $=$ LB genomen wordt, dan is DF de onlust na a_1 tijdseenh. in de 1e productie en a_2 in de 2e productie.

Neemt men AC $=$ LA, dan is EC de onlust als de volgorde wordt omgekeerd. Uit de onderstelde gelijkheid van FD en CE volgt dan (8).

De beteekenis van (9) uitgebreid op meerdere productie is nu meetkundig deze, dat een rechte evenwijdig aan de t-as de krommen zoo snijdt, dat GH : GI : GK : . . . $= a_1 : a_2 : a_3 : \ldots$

Het in § 11 gezegde, dat de onlustintensiteiten aan het einde van den werktijd niet gelijk zijn, is ook in de figuur te zien.

13. Bepalen we nu de economische productie.
Het saldo is:

$$L_1(t_1) + \ldots + L_n(t_n) - O\left(\sum \frac{t}{a}\right).$$

Dit is maximaal als

$$L_i'(t_i) = \frac{1}{a_i} O'\left(\sum \frac{t}{a}\right) \qquad (16)$$

en volgens (15)

$$L_i'(t_i) = O_i'\left(a_i \sum \frac{t}{a}\right). \qquad (17)$$

Er komen zoo n vergel. in de n veranderlijken t_i. Ze drukken uit, dat de grensoverschotten voor alle goederen gelijk aan de eenheid zijn. Het resultaat van § 8 is als bijzonder geval er in begrepen.

14. Bepalen we voor dit geval de rationeele productie, dan zullen we zien, dat Liefmann's keuze (§ 9) juist is. We moeten dan het maximale nut bij gegeven opoffering bepalen. O is dan constant. De werktijden staan dan onderling in het volgende verband:

$$\sum \frac{t}{a} = \text{const.}$$

PROSPECTUS

PRACTISCHE VRAAGSTUKKEN

OVER DE

BESCHRIJVENDE MEETKUNDE

MET

HOOFDPUNTEN VAN DE THEORIE TEN DIENSTE VAN HET NIJVERHEIDSONDERWIJS

DOOR

H. C. BOONSTRA

LEERAAR MATHESIS SCIENTIARUM GENITRIX
TE LEIDEN



TWEEDE DRUK

P. NOORDHOFF N.V. — 1930 — GRONINGEN

Prijs f 1.20

VOORBERICHT.

Voor het verwerken van deze leerstof wordt eenige kennis van Vlakke en Ruimte-Meetkunde verondersteld, ongeveer zooveel als te leeren is uit de Meetkunde voor M. U. L. O. I en uit de Kleine Stereometrie van P. Wijdenes.

Gebaseerd op het beginsel der zelfwerkzaamheid, kan dit werkje grootendeels bestaan uit opgaven, die elkaar geleidelijk in moeilijkheid opvolgen, in verband met het bevattingsvermogen der leerlingen. Dit is mogelijk, aangezien, behalve dan kennis van Planimetrie en Stereometrie, Beschrijvende Meetkunde in hoofdzaak de activiteit van het voorstellingsvermogen eischt.

Beschrijvende Meetkunde is projectieleer, doch meer wetenschappelijk opgevat. Beginnende met gewone projectie, zullen de beoefenaars geleidelijk aan door initiatief-handeling in 't bezit der kennis van de Beschrijvende Meetkunde komen.

De eerste 75 vraagstukken dienen voornamelijk om thuis te geraken in den eersten ruimtehoek. Zij, die op de hoogte zijn van het gewone projecteeren, kunnen gevoeglijk bij dit laatste nummer aanvangen. De opgaven 101—108 kunnen beschouwd worden als vormende den overgang van het concrete tot het abstracte gedeelte.

De werkstukken, die in dit werkje voorkomen, staan zoo dicht mogelijk bij de practijk.

Ik heb gemeend, niet alle standaard-vraagstukken, die samen de theorie der Beschrijvende Meetkunde vormen, in dit boek te moeten opnemen, ten einde daardoor de zelfwerkzaamheid onder leiding van den leeraar zoo hoog mogelijk op te voeren. Wie een volledig boek met veel mooie en duidelijke figuren wenscht, zij echter gewezen op het Leerboek der Beschrijvende Meetkunde, deel I en II van Prof. Dr. Hk. de Vries en P. Wijdenes, dat tevens goeden dienst kan doen als handleiding voor den leeraar.

H. C. B.

INHOUD:

HOOFDSTUK XX.

DRIE BELANGRIJKE EIGENSCHAPPEN.

I. De horizontale en de verticale projectie van een punt liggen in de projectieteekening in een lijn, die loodrecht staat op de as van projectie.

Gegeven:
A is een punt, waarvan A_1 en A_2 de projecties zijn op H en V.

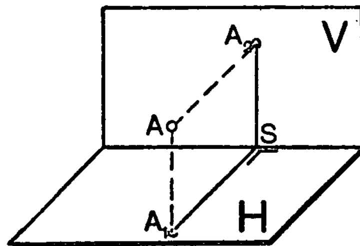


Fig. 47.

Te bewijzen:
De loodlijnen, uit A_1 en A_2 op de as neergelaten, staan in hetzelfde punt loodrecht op de as.

Bewijs:

Breng door de projecteerende lijnen AA_1 en AA_2 een plat vlak U; dit vlak snijdt de as van projectie in een punt S en verder H en V volgens A_1S en A_2S.

$AA_1 \perp H$, dus $AA_1 \perp$ as
$AA_2 \perp V$, dus $AA_2 \perp$ as } volgens een eig. van de stereometrie,

dus staat de as loodrecht op het vlak U door AA_1 en AA_2, dus loodrecht op de snijlijnen van U met H en V, dus in S loodrecht op SA_1 en op SA_2; slaan we nu V neer in H, dan zijn de rechte hoeken bij S samen 180°; dus liggen dan A_1, S en A_2 in een rechte lijn.

II. De projectie van een rechten hoek is een rechte hoek, als een van zijn beenen evenwijdig is met het projectievlak.

Gegeven:
$\angle$ ABC is 90°; AB//H; $\angle A'B'C'$ is de projectie van $\angle$ ABC op H.

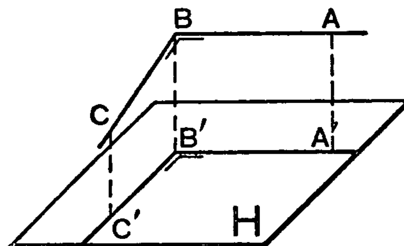


Fig. 48.

Te bewijzen:
$\angle A'B'C' = 90°$

$$\text{dus} \quad \frac{dt_1}{a_1} + \frac{dt_2}{a_2} + \ldots . = 0.$$

De voorwaarde voor het maximale saldo is:

$$L_1'(t_1)dt_1 + \ldots \qquad + L_n'(t_n)dt_n = 0$$

dus $\quad a_1 L_1'(t_1) = a_2 L_2'(t_2) = \ldots$

In verband met § 11 is dus de lustintensiteit van i evenredig met de onlustintensiteit van i, dus zijn de *grensoverschotten aan elkaar gelijk.*

15. Passen we nu nog de L-functie toe op een geval van ruilhandel.

Stel, dat van 2 personen A en B, A van een goed, dat we het eerste zullen noemen, a eenheden bezit; B van een ander goed b eenheden bezit. Onderzoeken we hoe, bij gegeven L-functies een ruiling tot beider bevrediging zal plaats vinden.

Stellen we de L-functies:

van A voor het 1e goed $L_1(x)$; voor het 2e goed $L_2(x)$
„ B „ „ 1e „ $L_3(x)$; „ „ 2e „ $L_4(x)$,

als x de hoeveelheid voorstelt.

Stellen we verder, dat y eenh. van het 1e goed van A naar B en z van het 2e goed van B naar A gaan.

Na de ruiling is het nut, dat A heeft: $L_1(a-y) + L_2(z)$;
dat van B : $L_3(y) + L_4(b-z)$.

Opdat die vormen maximaal zijn, moet

$$-L_1'(a-y)\,dy + L_2'(z)\,dz = 0$$
$$L_3'(y)\,dy - L_4'(b-z)\,dz = 0.$$

Bovendien is $\quad \dfrac{dy}{dz} = \dfrac{y}{z}$

dus $$\frac{L_1'(a-y)}{L_2'(z)} = \frac{L_3'(y)}{L_4'(b-z)} = \frac{z}{y}. \qquad (18)$$

Als nu de ruiling geschiedt door tusschenkomst van een betaalmiddel, dan zijn y en z omgekeerd evenredig met de prijzen, die de eenheden der goederen opbrengen. Vergelijking (18) zegt nu, dat voor ieder der ruilenden de lustintensiteiten der goederen zich verhouden als hun prijzen. Weer blijkt dus, dat de L′ beslissend is voor de waardeering van de eenheid van een goed.

Ook blijkt uit (18) dat door de L-functies en door de voorraden zoowel de ruilverhouding als de hoeveelheden der geruilde goederen geheel bepaald zijn.

HET METRIEKE STELSEL.

In nr. 9 (1 Oct. 1929) van het maandblad Valcooch heb ik een artikeltje geplaatst over het metrieke stelsel; ik zal dat niet in zijn geheel weergeven, maar enkel de hoofdpunten noemen, nl. 1. op een lagere school wordt in het vierde leerjaar aan het metrieke stelsel een uitbreiding gegeven, die onzinnig is; 2. de rekenboeken voor de lagere school en vele voor het uitgebreid lager en middelbaar onderwijs houden vast aan de sleur om maten en gewichten te noemen, die zuiver fictief zijn en alleen in die boekjes, en dus in examensommen, voorkomen; 3. er zijn eenige vreemde woorden om veelvouden en onderdeelen aan te wijzen en er zijn eenheden van lengte, van oppervlak, van inhoud en van massa; niet elk van de eerste voor elk van de laatste geplaatst geeft een maat; men krijgt daardoor toch samenstellingen, die door niemand ooit gebruikt worden, b.v. kiloliter, dekastère, myriameter; ook mag men niet alle lengtematen zoo maar van de exponenten 2 en 3 voorzien om er vlaktematen en inhoudsmaten van te maken; de ophooging in Amsterdam-Zuid, de uitgraving voor een haven, de hoeveelheid beton voor sluiswerken en keileem voor een afsluitdijk, wordt gezegd in kubieke meters; men zegt 8000 m^3 beton en niet 8 kubieke dekameter, 5 000 000 m^3 zand, niet 5 kubieke hektometer; 4. wat afgedaan heeft, snijde men af en men beperke zich tot wat wezenlijk voorkomt of voor kan komen.

Ik ben zelf opmerkzaam gemaakt op deze zaak een jaar of drie geleden naar aanleiding van een opmerking van Prof. De Haas te Delft; ik had er nooit eerder over nagedacht, maar als de meeste anderen het oude bestendigd; er niet bij stilstaande, dat veel van het bestaande de vrucht is van de oververwerking door de onderwijzers, door de examinatoren voor diverse examens, jaar in, jaar uit; evenals zulks gebeurd is met de evenredigheden, die hoe eer hoe beter tot haar geringe plaats in de rekenkunde moeten worden teruggedrongen; bij deze stof lag vooral de schuld aan de uitbreiding bij de kweekscholen en onderwijzers- en hoofdonderwijzers-examens en vergelijkende examens; de logarithmenraadsels, toepassingen van ${}^{a}\log b \times {}^{b}\log c = {}^{a}\log c$, met verschillende grondtallen ($\sqrt{2}$, 2, $2\sqrt[3]{2}$, 2^{-1} b.v.) en exponentieele en logarithmische vergelijkingen,

aan welker opdringing, als ik het goed heb, het Staatsexamen niet vreemd was, met als gevolg opneming in schoolboeken, uitbreiding, oververwerking, steeds samengestelder klitten voor de eindexamens H. B. S. en Gymnasium en het examen Wiskunde L. O. (wie onderzoekt eens, hoe die onnutte, zelfs schadelijke, ballast zich onder de leerstof heeft weten te dringen?)

Na deze kleine uitweiding, nuttig om den lezer te laten zien, hoe meerdere onderwerpen door jarenlang examineeren uitwassen zijn gaan vertoonen, kom ik terug op het feit, dat mij helder werd, hoe bitter noodig het was, dat allen, die onderwijs hebben te geven in het metrieke stelsel, zouden luisteren naar de stem van Prof. De Haas en ik acht het een voorrecht door mijn leerboeken en door artikelen mede te mogen helpen tot wegsnijding van die uitwassen; zooals gezegd, er is niets en ook heelemaal niets bij van mij zelf, maar het blijkt mij bijna dagelijks, hoe hoog noodig het nog is, de aandacht te vestigen op de aan te brengen vereenvoudiging; van wien het dan wel uitgaat? Het is volstrekt noodig, dat allerlei maten en eenheden overal ter wereld op dezelfde wijze worden uitgedrukt, voor lengte, oppervlakte, inhoud, massa, tijd, electriciteit en magnetisme, kracht, arbeid, druk, vermogen, warmte, licht, dat op werkteekeningen en bestekken letters, cijfers, teekens, op dezelfde wijze worden geschreven en geplaatst, dat schroeven en moeren, pijpen en buizen op dezelfde wijze worden aangeduid enz. enz.

Het nut daarvan moet ieder inzien, die de vervanging van de talrijke verschillende onhandelbare oude maten en gewichten van voor 1800 door de eenvoudige metrieke maten een groote vooruitgang vindt. Van wie nu de normalisatie in ons land uitgaat? Van de Hoofdcommissie voor de Normalisatie in Nederland, gevestigd te 's-Gravenhage, Koningskade 23; deze organisatie, die een veertigtal commissies op verschillend gebied heeft ingesteld, heeft o.a. uitgegeven de normaalbladen N 333 en N 334 (ze kosten 15 cents per stuk) en wel in Februari 1927; bovenaan staat: Maatschappij voor Nijverheid, en Koninklijk Instituut van Ingenieurs; dit wettigt het vermoeden, dat de normaalbladen zijn opgemaakt onder beider goedkeuring; welnu, blijkbaar hebben de kooplui, de fabrikanten, de ingenieurs in hun practijk voldoende aan de maten, die men ziet op de nadrukken van de normaalbladen N 333 en N 334, terwijl ze zich houden aan de hierop gestelde afkortingen en symbolen.

MIJ. VAN NIJVERHEID	VASTGESTELD FEBR. 1927	KON. INST. V. ING

HOOFDCOMMISSIE VOOR DE NORMALISATIE IN NEDERLAND

1	Lengte
kilometer	km
hektometer	hm
dekameter	dam
meter	m
decimeter	dm
centimeter	cm
millimeter	mm
mikron	μ

2	Oppervlak
□ kilometer	km^2
hektare of □ hektom.	ha
are of □ dekameter	a
centiare	ca
□ meter	m^2
□ decimeter	dm^2
□ centimeter	cm^2
□ millimeter	mm^2

3	Inhoud
kub. meter	m^3
hektoliter	hl
liter	l
kub. decimeter	dm^3
deciliter	dl
centiliter	cl
kub. centimeter	cm^3
kub. millimeter	mm^3

4	Tijd
uur	h
minuut	min
secunde	sec

5	Massa
ton	t
quintaal	q
kilogram	kg
hektogram	hg
gram	g
karaat (alleen v. edelsteenen)	MK
decigram	dg
centigram	cg
milligram	mg

6	Electriciteit en magnetisme		
ampère	A	kilovolt	kV
ohm	Ω	kilowatt	kW
volt	V	mikrofarad	μF
watt	W	megohm	MΩ
joule	J	volt-coulomb	VC
coulomb	C	volt-ampère	VA
farad	F	ampère-uur	Ah
henry	H	watt-uur	Wh
milliampère	mA	kilowatt-uur	kWh

7	Kracht
ton	t
kilogram	kg
gram	g
dyne	dn
megadyne	Mdn

8	Vermogen
paardekracht	pk
kilowatt	kW
watt	W

9	Arbeid
kilogram-meter	kgm
gram-centimeter	gcm
paardekracht-uur	pkh
erg	erg
joule	J
watt-uur	Wh
kilowatt-uur	kWh

10	Warmte
graden Celsius	°C.
calorie of kg calorie	kcal
gram-calorie	gcal

11	Druk
atmosfeer	at
barye	bar
mega-barye	Mba

12	Licht
internationale kaars	k
lumen	lm
lux	lx
lambert	La

Het **millioenvoud** aanduiden door voorvoeging van **mega** (M),
„ **millioenste dee** „ „ „ „ **mikro** (μ),
„ **duizendvoud** „ „ „ „ **kilo** (k),
„ **duizendste deel** „ „ „ „ **milli** (m).

SAMENGESTELDE SYMBOLEN schrijven als volgt:

b.v. Dichtheid . . . . : kg/dm^3, g/cm^3
Electrische stroomdichtheid : A/mm^2
Breekspanning . . . . . : kg/mm^2
Snelheid . . . . : km/h.

N 333

OPMERKINGEN: De groepen 1, 2, 3, 5 en 7 zijn aldus samengesteld door het „**Bureau Internationa des Poids et Mesures.**" Groep 6 is vastgesteld door de „**Intern. Electrotechnical Commission.**"

*) NAGEDRUKT MET TOESTEMMING VAN DE HOOFDCOMMISSIE VOOR DE NORMALISATIE IN NEDERLA

Eenheden uitgedrukt in grondeenheden van lengte en tijd.

1	Lengte
kilometer	10^5 cm
hektometer	10^4 cm
dekameter	10^3 cm
meter	10^2 cm
decimeter	10 cm
centimeter	1 cm
millimeter	10^{-1} cm
mikron	10^{-4} cm

2	Oppervlak
□ kilometer	10^{10} cm^2
hektare of □ hm	10^8 cm^2
are of □ dekam.	10^6 cm^2
centiare	10^4 cm^2
□ meter	10^4 cm^2
□ decimeter	10^2 cm^2
□ centimeter	1 cm^2
□ millimeter	10^{-2} cm^2

3	Inhoud
kub. meter	10^6 cm^3
hektoliter	10^5 cm^3
liter	10^3 cm^3
kub. decimeter	10^3 cm^3
deciliter	10^2 cm^3
centiliter	10 cm^3
kub. centimeter	1 cm^3
kub. millimeter	10^{-3} cm^3

4	Tijd
uur	3600 sec
minuut	60 sec
secunde	1 sec

Eenheden uitgedrukt in grondeenheden van massa, lengte en tijd.

5	Massa
ton	10^6 g
quintaal	10^5 g
kilogram	10^3 g
hektogram	10^2 g
gram	1 g
karaat	2×10^{-1} g
decigram	10^{-1} g
centigram	10^{-2} g
milligram	10^{-3} g

6	Electriciteit en magnetisme		
ampère	$10^{-1}\ g^{1/2}\ cm^{1/2}\ sec^{-1}$	kilovolt	$10^{11}\ g^{1/2}\ cm^{3/2}\ sec^{-2}$
ohm	$10^{9}\ cm\ sec^{-1}$	kilowatt	$10^{10}\ g\ cm^{2}\ sec^{-3}$
volt	$10^{8}\ g^{1/2}\ cm^{3/2}\ sec^{-2}$	mikrofarad	$10^{-15}\ cm^{-1}\ sec^{2}$
watt	$10^{7}\ g\ cm^{2}\ sec^{-3}$	megohm	$10^{15}\ cm\ sec^{-1}$
joule	$10^{7}\ g\ cm^{2}\ sec^{-2}$	volt-coulomb	$10^{7}\ g\ cm^{2}\ sec^{-2}$
coulomb	$10^{-1}\ g^{1/2}\ cm^{1/2}$	volt-ampère	$10^{7}\ g\ cm^{2}\ sec^{-3}$
farad	$10^{-9}\ cm^{-1}\ sec^{2}$	ampère-uur	$36 \times 10\ g^{1/2}\ cm^{1/2}$
henry	$10^{9}\ cm$	watt-uur	$36 \times 10^{9}\ g\ cm^{2}\ sec^{-2}$
milliampère	$10^{-4}\ g^{1/2}\ cm^{1/2}\ sec^{-1}$	kilowatt-uur	$36 \times 10^{12}\ g\ cm^{2}\ sec^{-2}$

Eenheden uitgedrukt in grondeenheden van kracht, lengte en tijd.

7	Kracht
ton	10^6 g
kilogram	10^3 g
gram	1 g
dyne	$1{,}0197 \times 10^{-3}$ g
megadyne	$1{,}0197 \times 10^{3}$ g

8	Vermogen
paardekracht	75×10^5 g cm sec^{-1}
kilowatt	$1{,}0197 \times 10^7$ g cm sec^{-1}
watt	$1{,}0197 \times 10^4$ g cm sec^{-1}

9	Arbeid
kilogram-meter	10^5 g cm
gram-centimeter	1 g cm
paardekracht-uur	27×10^9 g cm
erg	$1{,}0197 \times 10^{-3}$ g cm
joule (absoluut)	$1{,}0197 \times 10^{4}$ g cm
watt-uur	$3{,}671 \times 10^{7}$ g cm
kilowatt-uur	$3{,}671 \times 10^{10}$ g cm

10	Warmte
calorie of kg calorie	$426{,}9 \times 10^5$ g cm
gram-calorie	$426{,}9 \times 10^2$ g cm

11	Druk
atmosfeer	$1{,}0332 \times 10^3$ g cm^{-2}
barye	$1{,}0197 \times 10^{-3}$ g cm^{-2}
mega-barye	$1{,}0197 \times 10^{3}$ g cm^{-2}

Belangrijke verhoudingen en getallen.

12	Licht
Lumen	= eenheid v. lichtstroom
Lux	= verlichting van 1 lm/m^2
Lambert	= helderheid van een volkomen diffuus stralend vlak, dat 1 lm/cm^2 uitzendt.

Gasconstante voor 1 mol.
$0{,}8206 \times 10^2$ cm^3 at graad^{-1}
$0{,}8315 \times 10^8$ erg graad^{-1}
8,315 abs. joule graad^{-1}
1,978 g cal graad^{-1}

Verhouding arbeid en warmte	
1 J =	$238{,}9 \times 10^{-6}$ cal
1 kWh =	860,0 cal

Onbenoemde getalwaarden	
π =	3,1415927
e =	2,7182818

cm = het honderdste deel van den afstand bij 0° C. van het midden van twee lijnen getrokken op den internationalen standaardmeter, welke te Sèvres in het Bureau International des Poids et Mesures wordt bewaard.

g = het duizendste deel van de massa van het standaardkilogram, hetwelk in het genoemde Internationale Bureau wordt bewaard.

sec = het $\frac{1}{86400}$ deel van den gemiddelden zonnedag.

graad C. = het honderdste deel van het temperatuurverschil tusschen smeltend ijs en kokend water bij 1 at druk.

ampère = de stroomsterkte, welke in 1 sec uit een oplossing van Ag NO_3 electrolytisch neerslaat 0,0011180 g zilver.

ohm = de weerstand bij 0° C. van een kwikzuil, lang 106,30 cm, doorsnede 1 mm^2 en gewicht 14,4521 g.

at = een druk gelijk aan dien, uitgeoefend door een kolom kwik van 760 mm lengte bij een temperatuur van 0° C. terplaatse, waar de zwaartekracht de normale waarde bezit.

k cal = de hoeveelheid warmte noodig om 1 kg water van 14,5° C. tot 15,5° C. te verhitten.

In de verhouding van massa tot krachteenheden is als normale versnelling der zwaartekracht aangenomen 9,80665 cm sec^{-2}, welk getal door de 3e Conférence générale des Poids et Mesures (1901) is aangenomen als geldig op 45° geogr. breedte aan het oppervlak van de zee.

OPMERKING: Wil men de in de tabel gegeven getallen toepassen met minder decimalen dan moet men, steeds uitgaande van de tabelwaarden, een of meer der laatste cijfers weglaten en het laatste blijvende cijfer alleen dan met 1 verhoogen, indien dit cijfer in de tabelwaarde gevolgd wordt door een 5, 6, 7, 8 of 9.

Voorbeeld:					
tabelwaarde van π =	3,1415927	3,1415927	3,1415927	3,1415927	3,1415927
afgerond	3,141593	3,14159	3,1416	3,142	3,14

N 334

NAGEDRUKT MET TOESTEMMING VAN DE HOOFDCOMMISSIE VOOR DE NORMALISATIE IN NEDERLAND

Ik geef deze zonder bespreking, maar wil nog even vermelden, wat de Heer G. Bolkestein, Inspecteur van het M. O. mij op 12 Oct. 1929 schreef, nadat ik hem op het genoemde nummer van Valcooch had opmerkzaam gemaakt.

„Vóór ruim een half jaar zijn alle middelbare scholen, namens de Regeering, door de Inspecteurs opmerkzaam gemaakt op de genormaliseerde symbolen voor eenheden; gevraagd is„de beide normaalbladen N 333 en N 334 aan te schaffen. Bij de a.s. eindexamens zullen wellicht de internationale afkortingen in de opgave gebruikt worden."

Men weet het nu en het blijkt, dat er reeds werk van gemaakt is; in Indië is er ook reeds een aanschrijving in dien geest rondgezonden.

Om ook het lager onderwijs te verlossen van alle fictieve maten en om eenheid te brengen in de schrijfwijze hebben Prof. De Haas te Delft, de Heer M. Vrij, hoofd van de Nieuwe Schoolvereeniging te Amsterdam en de laatste ondergeteekende een adres tot den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen gezonden met het verzoek te gebieden, dat men zich bij het lager onderwijs beperke tot het onderstaande en dat men gehouden zal zijn de internationale afkortingen gebruiken; dit moet dan tevens gelden voor de toelatingsexamens tot de middelbare school, voor deze zelf en voor het MULO, voor Zeevaartscholen, voor Nijverheidsscholen, enz. Het eenige verschil met de normaalbladen is, dat niet genoemd worden mikron en karaat en dat de indeeling iets verschilt, beide om didaktische redenen.

HET METRIEKE STELSEL.

Waarde, naam en afkorting.

1000	kilo	k	0,1	deci	d
100	hekto	h	0,01	centi	c
10	deka	da	0,001	milli	m

Lengtematen.

kilometer	km
hektometer	hm
dekameter	dam
meter	m
decimeter	dm
centimeter	cm
millimeter	mm

Vlaktematen.

Alle lengtematen met □ er voor; bij afkortingen het cijfer 2 boven rechts, bv. □ decimeter of dm^2 en voor land

hektare	ha = 1 hm^2
are	a = 1 dam^2
centiare	ca = 1 m^2

Inhoudsmaten.		Gewichten.	
kub. meter	m^3	ton	t = 1000 kg
kub. decimeter	dm^3	quintaal	q = 100 kg
kub. centimeter	cm^3	kilogram	kg
kub. millimeter	mm^3	hektogram	hg
hektoliter	hl	**gram**	g
liter	l	decigram	dg
deciliter	dl	centigram	cg
centiliter	cl	milligram	mg

Hieronder volgt de tekst van het adres; we hopen binnen niet te langen tijd te hooren, dat er gevolg gegeven is aan het verzoek, waarmee velen, naar wij vertrouwen, van harte instemmen.

Amsterdam, 10 Januari 1930.

Aan Zijne Excellentie den Minister van Onderwijs, Kunsten en Wetenschappen.

Ondergeteekenden

Dr. M. DE HAAS, hoogleeraar aan de Technische Hoogeschool te Delft,

M. VRIJ, directeur der Nieuwe Schoolvereeniging te Amsterdam en P. WIJDENES, oud-leeraar bij het M.O. te Amsterdam,

hebben de eer het volgende aan Uwe Excellentie voor te leggen:

In Februari 1927 heeft de Hoofdcommissie voor de Normalisatie in Nederland onder meer een stelsel van maten en gewichten vastgesteld, dat voldoende is in het gebruik voor alle doeleinden. Het stelsel is afgedrukt op bijgaande normaalbladen 333 en 334.

Bij het onderwijs, in het bijzonder bij het Lager Onderwijs en bij de toelatingsexamens voor het Middelbaar en Gymnasiaal Onderwijs gebruikt men naast deze maten nog verschillende andere, die slechts daar voorkomen en die in de practijk zeer zelden of nooit toepassing vinden; we noemen er eenige van (genomen uit een sommenboekje) met de oude schrijfwijzen: MM, MM^2, DS, S, dS, cS, MG, DG, ML, KL, HM^3, DM^3,; er zullen er wel meer zijn.

Het behoeft geen betoog, dat het onderwijs verlost moet worden van deze onnoodige, overbodige, zelfs schadelijke uitbreiding, die er door de onderwijzers zelf gaandeweg aan gegeven is.

Daarbij komt nog, dat er eenheid moet komen in de schrijfwijze van de maten en gewichten; verreweg de eenvoudigste afkortingen (symbolen) zijn die, welke zijn aangegeven op de normaalbladen.

Tot dusverre schreef men in Nederland b.v. KG, kG, Kg, Kgr of KGr, alle zonder punten of met een of twee punten; welnu, men kan volstaan met kg, zonder punten, evenzoo m, dm, cm, een notatie, die reeds 50 jaar geleden internationaal is aangenomen.

Ondergeteekenden verzoeken Uwe Excellentie derhalve eerbiedig het daarheen te willen leiden, dat voortaan bij het Lager, Middelbaar en Vakonderwijs slechts mogen worden gebruikt:

1. de maten en gewichten,
2. de verkorte schrijfwijzen,

een en ander zooals op de normaalbladen 333 en 334 wordt aangegeven.

't Welk doende:

w.g. Prof. Dr. M. DE HAAS.
„ M. VRIJ.
„ P. WIJDENES.

H. G. A. VERKAART, *Schriftelijke opgaven van het examen wiskunde L. O. 1891—1929.* Prijs *f* 1.50.

H. C. BOONSTRA, *Practische vraagstukken over de beschrijvende meetkunde* met hoofdpunten van de theorie ten dienste van het nijverheidsonderwijs. Tweede druk, met 49 figuren, prijs *f* 1.20.

Dr. D. J. E. SCHREK, *Beginselen der Analytische meetkunde.* Met vragen en opgaven en de antwoorden. Derde herziene druk, ingenaaid *f* 2.75, gebonden *f* 3.25.

Dezer dagen verschijnt:

WISKUNDE VOOR ZEEVAARTSCHOLEN

DEEL I. REKENEN — ALGEBRA — MEETKUNDE
Prijs gecartonneerd . . . . *f* 3.90

DEEL II. DRIEHOEKSMETING
Prijs gecartonneerd . . . . *f* 2.25

door P. WIJDENES
AMSTERDAM, IN OVERLEG MET
A. C. P. E. VERMEULEN
DIRECTEUR DER VISSCHERIJSCHOOL TE VLAARDINGEN

UITGAVE VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN

Zoo juist verscheen:

PRACTISCHE HANDELSKENNIS

ten gebruike bij het onderwijs op Handelsscholen, Cursussen en Privaatopleiding voor een der Handelsvakken, alsook voor zelfonderricht

door C. ZIESEL
OUD HANDELS-CORRESPONDENT EN LEERAAR M.O. ENGELSCH

Prijs *f* 2.75 . . . . Geb. *f* 3.25

UITGAVE VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN

In bewerking de **4e, vereenvoudigde druk** van

NIEUWE SCHOOL-ALGEBRA II.

Het overleg van den schrijver met Dr. Beth heeft tot gevolg:

1) sterke bekorting en vereenvoudiging van blz. 1—4;
2) kleine uitbreiding van blz. 29;
3) schrapping van de kleine letters blz. 41 en 42;
4) inkrimping van blz. 46 en 47;
5) inlassching van eenvoudige theorie over ongelijkheden op blz. 71;
6) vervanging van blz. 104—107 door hoogstens 1 blz.

VERDER IN BEWERKING

3e druk van Nieuwe School-algebra III.
9e druk van Wijdenes en De Lange, Vlakke Meetkunde I.
6e druk van Beknopte Meetkunde I.
5e druk van „ „ II.
5e druk van Beknopte Algebra I.
8e druk van Vraagstukken uit Rekenboek I.
9e druk van Algebra voor M.U.L.O. IIA.

TER PERSE

2e druk van Tafel H van Versluys.
4e druk van Gonggrijps Tafel B.

Pres. ex. van schoolboeken met het oog op de aanstaande herziening van de boekenlijst worden gaarne verstrekt. Vraag cat. B, die een wegwijzer is voor Uw aanvrage.

Dr. D. J. E. SCHREK.

BEGINSELEN DER ANALYTISCHE MEETKUNDE

3e druk, met gratis Antwoorden
Prijs f 2.75 - Gebonden f 3.25

UITGAVE VAN P. NOORDHOFF TE GRONINGEN